ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ՀԱՏՈՐ 9 № 1

«ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ»
ԵՐԵՎԱՆ 2013

Ընդգրկված է Հայաստանի Հանրապետության Բարձրագույն որակավորման հանձնաժողովի (ՀՀ ԲՈՀ) կողմից ընդունված թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունների արդյունքների տպագրման համար ընդունելի պարբերականների ցանկում՝ «Մաթեմատիկա» և «Մանկավարժություն» մասնագիտությունների համար 23.03.2007:

ՀՏԴ 51
ԳՄԴ 22.1

Մ 151 **Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում:** - Եր.: ՀՊՃՀ «Ճարտարագետ» հրատ., 2013.- Հատոր 9, № 1.- 64 էջ:

Խմբագրության հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան 105, ՀՊՃՀ, մասնաշենք 12, սենյակ 12202

Հեռ.: +(37410) 56-28-82

E-mail: mathdep@seua.am

Web: www.math.seua.am

facebook www.facebook.com/pages/Mathematics-in-High-School/339572519477837

ISSN 1829-3344

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(ПОЛИТЕХНИК)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF REPUBLIC OF ARMENIA
STATE ENGINEERING UNIVERSITY OF ARMENIA
(POLYTECHNIC)

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОМ 9 № 1

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

VOLUME 9 № 1

«ЧАРТАРАГЕТ»
ЕРЕВАН 2013

«TCHARTARAGET»
YEREVAN 2013

Включен в список периодических изданий, допустимых для публикования результатов кандидатских и докторских диссертаций по специальностям: “Математика” и “Педагогика”, принятых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Республики Армения (23.03.2007).

УДК 51
ББК 22.1
М 151 **Математика в высшей школе.**– Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2013. - Том 9, № 1.– 64с.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Адрес редакции: 0009, Ереван, ул. Теряна 105, ГИУА, корпус 12, комната 12202.
Телефон: +(37410) 56-28-82. **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

---

It is included in the accepted by the Highest Certifying Commission of Armenia (HCC) list of periodicals admissible for publications of the results of PhD and Doctoral theses by specialties Mathematics and Pedagogy (23.03.2007).
UDC 51
LBC 22.1
M 151 **Mathematics in Higher School.** - Yerevan: SEUA “Tchartaraget” Publishing House.- 2013.- Volume 9, №1.- 64p.

EDITORIAL COUNCIL

Address: 0009, Yerevan, 105 Teryan, SEUA, bld. 12, room 12202.
Tel: +(37410) 56-28-82, **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

ISSN 1829-3344

УДК 517.53/.57

О ω - ХАРАКТЕРИСТИКАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

В.С. Закарян, А.М. Джрбашян, Р.В. Даллакян
(Государственный инженерный университет Армении (Политехник))
E-mail: dallakyan57@mail.ru

Для случая неубывающего функционального параметра $\omega(x)$ найдено условие, обеспечивающее неограниченность характеристической функции $T_\omega(r,f)$ аналитических в единичном круге комплексной плоскости функций $f(z)$. В частном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$ и функции $T_\omega(r,f)$, $N_\omega(r,f^{-1})$ переходят в неванлинновские характеристики $T(r,f)$, $N(r,f^{-1})$, это утверждение ранее было доказано А. Г. Нафталевичем.

Ключевые слова: обобщенный оператор Римана-Лиувилля, произведение типа Бляшке, ядра Джрбашяна.

1°. Введение. В работе [1] М.М. Джрбашяна с применением некоторого функционального обобщения оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля построена теория факторизации классов $N\{\omega\}$ неванлинновского типа, охватывающая все функции мероморфные в единичном круге $|z|<1$ комплексной плоскости. Классы $N\{\omega\}$ зависят от функционального параметра $\omega(x)$, заданного в $[0,1)$, и в зависимости от монотонного возрастания или убывания функции $\omega(x)$ вложены или содержат неванлинновский класс N. При этом классы $N\{\omega\}$, содержащиеся в N, обладают тонкими граничными свойствами. Этой теории посвящена монография М.М. Джрбашяна и В.С. Закаряна [2], где данная теория дана в объединенной форме с дополнениями (см. также [3,4]).

По аналогии с классом N мероморфных в $|z|<1$ функций с ограниченной неванлинновской характеристикой $T(\rho,F)$, классы $N\{\omega\}$ определены ограниченностью характеристики $T_\omega(r,f)$ М.М. Джрбашяна, исследованием которой занимались многие специалисты. В работе [5] в случае убывающего функционального параметра $\omega(x)$ была найдена естественная связь между характеристиками $T(\rho,F)$ и $T_\omega(r,f)$, что связано с затруднениями в случае возрастающего $\omega(x)$. Данная же работа устанавливает одну теорему о характеристиках $T_\omega(r,f)$ в случае неубывающего функционального параметра $\omega(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega \in \Omega^*$ *- неубывающая функция и* $\{\alpha_i\}$ *- последовательность неубывающих, положительных чисел таких, что* $\alpha_i \to 1$ *при* $i \to \infty$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[C\left(\alpha_i, \omega\right) \right]^{-1} < +\infty ,$$

где $C(z,\omega)$ *– ядро М.М. Джрбашяна [1,2].*

Тогда существует последовательность комплексных чисел λ_i, $|\lambda_i| = \alpha_i$ такая, что любая аналитическая в $|z|<1$ функции $f(z)$ с нулями α_μ, $\mu = 1,2,\ldots,$ удовлетворяющими условию

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{|a_\mu|}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty ,$$

неограничена, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[C\left(\alpha_i ; \omega\right) \right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ \ln \left| f\left(\lambda_i\right) \right| \right\} = +\infty ,$$

где $L^{(\omega)}$ - обобщенный оператор интегродифференцирования и $L_{(+)}^{(\omega)} u(z) = [L^{(\omega)} u(z)]^+$.

Замечание. Отметим, что условие теоремы 1.1 на нули функции $f(z)$ равносильно ограниченности характеристики $N_\omega(r, f^{-1})$. Кроме того, отметим, что в частном случае $\omega(x) \equiv 1$, т.е. в случае неванлинновских характеристик, результат теоремы 1.1 ранее был установлен А.Г. Нафталевичем [6].

2°. Обозначения, определения и доказательства. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.1, необходимо ввести ряд обозначений и определений из [2]. Обозначим через Ω класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$;

2) $\omega(0) = 1,\ \int_0^1 \omega(x)dx < \infty$.

Далее функцию $P(\tau)$ отнесем к классу P_ω, если при некотором $\omega(x) \in \Omega$:

$$P(0) = 1,\ P(\tau) = \tau \int\limits_{\tau}^{1} \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\ \tau \in (0,1],$$

и введем в рассмотрение ядро типа Коши - М.М. Джрбашяна:

$$C\left(z,\omega\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k},\ |z|<1 ,$$

где $\Delta_0 = 1,\ \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)\, x^{k-1} dx,\ k = 1,2,3,\ldots$.

Ядро $C(z,\omega)$, как и ядро типа Шварца:

$$S\left(z,\omega\right) = 2C\left(z,\omega\right) - C\left(0,\omega\right) = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k},\ |z|<1$$

- аналитические в круге $|z|<1$ функции с особенностями точке $|z|=1$:

$$\lim_{r\to 1-0} C(r,\omega)=+\infty.$$

Введем в рассмотрение также гармоническое в круге $|z|<1$ ядро типа Пуассона:

$$P(\gamma,r,\omega)=\operatorname{Re} S\left(re^{i\gamma},\omega\right)=1+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{\Delta_k}\cos k\gamma\ ,\quad z=re^{i\gamma}\ .$$

Теперь для любых $\omega(x)\in\Omega.$ и $P(\tau)\in P_{\omega}$ введем в рассмотрение следующее обобщение интегродифференциального оператора Римана-Лиувилля:

$$L^{(\omega)}\{\phi(x)\}=-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\phi(x\tau)dP(\tau)\right\},\ \ x\in(0,1),$$

где функция $\phi(x)$, определенная на $(0,1)$, такова, что левая часть равенства существует почти всюду на $(0,1)$.

Как можно убедиться (см. [1-4]), применение оператора $L^{(\omega)}$ к любой функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ на величины Δ_k, т.е. $L^{(\omega)}\left[f(z)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Delta_k z^k$. Применение же обратного оператора суть деление коэффициентов степенного ряда на Δ_k. Таким образом, оператор $L^{(\omega)}$ является взаимооднозначным отображением в классе голоморфных в $|z|<1$ функций.

Введя в рассмотрение элементарный фактор Бляшке - М.М. Джрбашяна:

$$A_\omega(z,\xi)=\left(1-\frac{z}{\xi}\right)\exp\left\{-W_\omega(z,\xi)\right\},\ \ \left(|z|<1,|\xi|<1\right),$$

где

$$W_\omega(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}\omega(x)x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}\omega(x)x^{-k-1}dx\right]\frac{z^k}{\Delta_k},$$

отметим, что при $\omega(x)\equiv 1$ (см. [1, 2])

$$A(z,\xi)=A_\omega(z,\xi)=\frac{\xi-z}{1-\bar{\xi}z}\cdot\frac{|\xi|}{\xi},\ \ \left(|z|<1,|\xi|\le 1\right).$$

Далее будем предполагать, что последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ из единичного круга пронумерована в порядке неубывания модулей и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)dx<+\infty\ ,$$

где $\omega(x)$ - функция класса Ω. Тогда известно (см. [1-3]), что бесконечное произведение

$$B_\omega(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z,\xi)}$$

абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z| \le r < 1$ и определяет функцию, аналитическую в $|z| < 1$, с нулями $\{z_k\}$.

Обозначим через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω, подчиненных дополнительному условию

$$|\omega(x) - 1| \le k_\omega(\tau) x \qquad (0 \le x \le \tau < 1),$$

где $k_\omega(\tau) > 0$ - постоянная.

Пусть $F(z) = C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \ldots (C_\lambda \ne 0)$ - мероморфная в круге $|z| < 1$ функция; $\{a_\mu\}$ и $\{b_\upsilon\}$ - соответственно последовательности ее нулей и плюсов, отличных от $z = 0$ и пронумерованных в порядке неубывания модулей с учетом кратностей. Тогда известно, что для любой функции $\omega(x) \in \Omega^*$ и любого числа $\rho(0 < \rho < 1)$ справедлива следующая формула (см. [2]):

$$\ln F(z) = i \arg C_\lambda + \lambda k_\omega + \lambda \ln \frac{z}{\rho} + \sum_{0 < |a_\mu| \le \rho} \ln A_\omega \left(\frac{z}{\rho}; \frac{a_\mu}{\rho} \right) -$$

$$- \sum_{0 < |b_\upsilon| \le \rho} \ln A_\omega \left(\frac{z}{\rho}; \frac{b_\upsilon}{\rho} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\theta}; \omega \right) L^{(\omega)} \left\{ \ln \left| F\left(\rho e^{i\theta} \right) \right| \right\} d\theta \quad \left(|z| < \rho \right), \qquad (1)$$

где $k_\omega = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x} dx$.

Далее введем в рассмотрение функции

$$N_\omega(\rho; 0) \equiv N_\omega\left(\rho; \frac{1}{F}\right) = \sum_{0 < |a_\mu| \le \rho} W_\omega\left(0; \frac{a_\mu}{\rho}\right) + n(0,0)(\ln \rho - k_\omega) =$$

$$= \int_0^\rho \frac{n(t;0) - n(0;0)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0;0)(\ln \rho - k_\omega),$$

$$N_\omega(\rho; \infty) \equiv N_\omega(\rho; F) = \sum_{0 < |b_\upsilon| \le \rho} W_\omega\left(0; \frac{b_\upsilon}{\rho}\right) + n(0,\infty)(\ln \rho - k_\omega) =$$

$$= \int_0^\rho \frac{n(t;\infty) - n(0;\infty)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0;\infty)(\ln \rho - k_\omega),$$

$$m_\omega(\rho; 0) \equiv m_\omega\left(\rho; \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ \ln \frac{1}{\left| F\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|} \right\} d\theta,$$

$$m_\omega(\rho; \infty) \equiv m_\omega(\rho; F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ \ln \left| F\left(\rho e^{i\theta}\right) \right| \right\} d\theta,$$

где для каждого $t(0 < t < 1)$ через $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ обозначены соответственно количество нулей и плюсов функции $F(z)$ в круге $|z| \le t$. Теперь для любого $\omega(x) \in \Omega^*$ положим

$$T_\omega(\rho; F) \equiv m_\omega(\rho; F) + N_\omega(\rho; F), \quad 0 < \rho < 1.$$

Легко видеть, что $\left[T_\omega(\rho; F)\right]_{\omega \equiv 1} \equiv T(\rho; F)$, где $T(\rho; F)$ - характеристическая функция Неванлинны [5].

В предположении, что функция $\omega(x)$ из класса Ω или класса Ω^*, обозначим соответственно через $N(\omega)$ и $N^*(\omega)$ множества мероморфных в единичном круге $|z|<1$ функций $F(z)$ с ограниченной характеристической функцией $T_{\omega}(\rho, f)$.

Имеет место следующая лемма, необходимая для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 2.1. *Неубывающую последовательность положительных чисел* $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$, *такую, что*

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{\omega}(\alpha_i,\omega)\right]^{-1} < +\infty,$$

можно дополнить членами γ_i $(i=1,2,\ldots)$ *таким образом, чтобы дополненная последовательность* $\left\{\beta_i\right\}_1^{\infty}$ *удовлетворяла условиям:*

(i) $\left\{\beta_i\right\}_1^{\infty}$ *- последовательность неубывающих положительных чисел;*

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{\omega}(\beta_i,\omega)\right]^{-1} < +\infty$ *;*

(iii) $\overline{\lim_{i\to\infty}}\sum_{j=1}^{i}\left(\dfrac{\left[C\left(\beta_j,\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j,\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1},\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i,\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 < +\infty$.

Доказательство. Пусть $\left\{R_i\right\}_1^{\infty}$ - последовательность положительных чисел таких, что $R_i \uparrow 1$ при $i\to\infty$ и

$$0 < M_1 \le \left[\frac{C\left(R_i,\omega\right)}{C\left(R_{i+1},\omega\right)}\right]^{1/2} \le M_2 < 1,$$

где M_1 и M_2 - некоторые постоянные. Заметив, что по признаку Даламбера о сходимости рядов с положительными членами ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{\omega}(R_i,\omega)\right]^{-1/2} < +\infty$, проведем концентрические окружности с центром в $z=0$ и радиусами R_i $(i=1,2,\ldots)$. Если при некотором $i\ge 1$

$$\sum_{R_i\le\alpha_k<R_{i+1}}\left[C\left(\alpha_k,\omega\right)\right]^{-1} > \left[C\left(R_i,\omega\right)\right]^{-1/2},$$

то на отрезке $[R_i, R_{i+1})$ новых точек не добавим и будем считать, что $R_i \le \alpha_k \equiv \beta_k < R_{i+1}$. В противном случае - добавим некоторое конечное количество точек $\gamma_k \in [R_i, R_{i+1})$ так, чтобы множество чисел $\{\beta_k\}$, образованное объединением членов последовательности $\{\alpha_i\}_1^\infty$, лежащих в $[R_i, R_{i+1})$, с вновь добавленными числами γ_k оказалось неубывающей последовательностью в $[R_i, R_{i+1})$, удовлетворяющей условию

$$2\left[C\left(R_i,\omega\right)\right]^{-1/2} \ge \sum_{R_i \le \beta_k < R_{i+1}} \left[C\left(\beta_k,\omega\right)\right]^{-1} = \\ = \sum_{R_i \le \alpha_k < R_{i+1}} \left[C\left(\alpha_k,\omega\right)\right]^{-1} + \sum_{R_i \le \gamma_k < R_{i+1}} \left[C\left(\gamma_k,\omega\right)\right]^{-1} > \left[C\left(R_i,\omega\right)\right]^{-1/2}. \tag{2}$$

Отметим, что этот выбор возможен, поскольку $C\left(r,\omega\right) \ge 1$ - непрерывная, монотонно возрастающая на $[0,1)$ функция. Объединив последовательно конечные множества чисел $\left\{\beta_k\right\} \subset [R_i, R_{i+1})$ $(1 \le i < \infty)$, получим некоторую последовательность $\left\{\beta_i\right\}_1^\infty$, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию (i).

Далее, разложив ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left[C(\beta_i,\omega)\right]^{-1}$ на два слагаемых, где суммирование произведено по тем отрезкам $\left[R_i, R_{i+1}\right)$, в которых точек γ_k не добавлено, и по тем, где добавлено, с учетом (2) получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[C\left(\beta_i,\omega\right)\right]^{-1} \le \sum_{i=1}^{\infty}\left[C\left(\alpha_i,\omega\right)\right]^{-1} + \sum_{\substack{i=1 \\ \text{добавлено}}}^{\infty} \sum_{R_i \le \beta_k < R_{i+1}} \left[C\left(\beta_k,\omega\right)\right]^{-1} \le \\ \le const + 2\sum_{i=1}^{\infty}\left[C\left(R_i,\omega\right)\right]^{-1/2} < +\infty.$$

Таким образом, справедливо также (ii). Для доказательства (iii) предположим, что $R_k \le \beta_i < R_{k+1}$ $(k \ge 1)$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 = \\ = \sum_{\beta_j < R_1}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 + \\ + \sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m \le \beta_j < R_{m+1}}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 + \\ + \sum_{R_{k-1} \le \beta_j < \beta_i}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2. \tag{3}$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}<1,$$

и, следовательно, первая сумма правой части (3) не превосходит количество точек β_j, находящихся в круге. Но это количество в силу выбора точек β_i конечно, т. е.

$$\sum_{\beta_j<R_1}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<const\,. \tag{4}$$

Далее в силу (2) легко видеть, что

$$\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m\le\beta_j<R_{m+1}}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<$$

$$<\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m\le\beta_j<R_{m+1}}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\sum\limits_{R_{m+1}\le\beta_n<R_{m+2}}\left[C\left(\beta_n;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m\le\beta_j<R_{m+1}}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1/2}\cdot\left[C\left(R_m;\omega\right)\right]^{-1/2}}{\left[C\left(R_{m+1};\omega\right)\right]^{-1/2}}\right)^2<$$

$$<\frac{1}{M_1^2}\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m\le\beta_j<R_{m+1}}\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{k-2}\sum_{R_m\le\beta_j<R_{m+1}}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<$$

$$<\frac{1}{M_1^2}\sum_j\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}<const. \tag{5}$$

Для третьей же суммы правой части (3) легко видеть, что

$$\sum_{R_{k-1}\le\beta_j<\beta_i}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<\sum_{j=k-1}^{i}\frac{1}{\left(i-j+1\right)^2}.$$

Но последняя сумма для любого i конечна, следовательно,

$$\sum_{R_{k-1}\le\beta_j<R_i}\left(\frac{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_j;\omega\right)\right]^{-1}+\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1}+\ldots+\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2<const. \tag{6}$$

Из (3)-(6) следует справедливость утверждения пункта (iii) леммы.

3°. Доказательство теоремы 1.1. Отметим, что если нули $\alpha_\mu,\ \mu=1,2,\ldots$ аналитической в $|z|<1$ функции $f(z)$ не удовлетворяют условию плотности

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{|\alpha_\mu|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,$$

то характеристика $T_\omega(r,f)$ неограничена.

Теперь пополним последовательность $\{\alpha_i\}$ точками $\{\gamma_i\}$ таким образом, чтобы пополненная последовательность $\{\beta_i\}$, $\{\beta_i\}=\{\alpha_i\}\cup\{\gamma_i\}$ удовлетворяла условиям (i), (ii) и (iii) из леммы 2.1. Тогда в силу формулы (1):

$$\ln\left|f(z)\right|=\sum_{0<|a_\mu|\le\rho}\ln\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho}\right)\right|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\varphi};\omega\right)L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\right\}d\varphi .$$

Применив оператор $L^{(\omega)}$ к обеим частям этого равенства, получим

$$L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|\right\}\le\sum_{0<|a_\mu|\le\rho}L^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\alpha_\mu}{\rho}\right)\right|\right\}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0\left(\frac{z}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)};1\right)L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right\}d\varphi,$$

откуда

$$L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|\right\}\le\sum_{0<|a_\mu|\le\rho}L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|\right\}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0\left(\frac{z}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)};1\right)L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right\}d\varphi. \quad (7)$$

Далее, полагая, что $\{R_n\}$ - монотонно возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}<+\infty$, проведем концентрические круги с центром в точке $z=0$ и с радиусами R_n. Теперь определим последовательность $\{\lambda_n\}$. Для этого положим $\lambda_i=\beta_i$, а затем, предположив, что точки $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ уже определены, найдем λ_n следующим образом: из точки A_{n-1} пересечения радиуса $O\lambda_{n-1}$ с окружностью $|z|=1$ в положительном направлении на единичной окружности отложим дугу длины $\left[C\left(\beta_{n-1};\omega\right)\right]^{-1}$. Обозначим другой конец этой дуги через A_n и проведем радиус OA_n. Через λ_n обозначим точку пересечения радиуса OA_n с окружностью $|z|=\beta_n$. Далее, обозначив $\theta_i=\arg\lambda_i$ в точке λ_i, $|\lambda_i|<R_n$, из (6) получим

$$L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}\le\sum_{0<|a_\mu|\le R_n}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\Theta_i}}{R_n};\frac{a_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right)L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(R_ne^{i\theta})\right|\right\}d\varphi,$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right)L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}d\varphi$$

и с умножением на $\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}$:

$$\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}\le\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}\sum_{0<|a_\mu|\le R_n}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta_i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right)d\varphi .$$

Суммируя эти неравенства по всем i, для которых

$$2\left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}\le 1-\beta_i , \tag{8}$$

получим

$$\sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}\le\sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}\sum_{0<|a_\mu|\le R_n}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta_i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}\sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right)d\varphi . \tag{9}$$

Для оценки сверху подынтегральной суммы правой части этого неравенства предположим, что τ - достаточно малое, положительное число. Тогда, если $|\theta_i-\varphi|>\tau$, то очевидно, что существует число c, $c>0$ такое, что

$$P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right)\le c .$$

Следовательно,

$$\sum_i\left[C(\beta_{j,}\omega)\right]^{-1}P_0\left(\theta_j-\phi;\frac{|\lambda_j|}{R_n}\right)\le C\sum_i\left[C(\beta_{j,}\omega)\right]^{-1}\le C_1, \tag{10}$$

где C_1 не зависит от n и φ.

Пусть $\left|\Theta_i-\phi\right|<\tau$. Легко проверить, что если $\omega\left(x\right)$ удовлетворяет условиям теоремы, то $1-\beta_i\le const\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}$, значит,

$$\sum\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}\cdot P_0\left(\Theta_i-\phi;\frac{|\lambda_i|}{R_n}\right)\le const\sum\frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-2}}{\sin^2\frac{\Theta_i-\phi}{2}} , \tag{11}$$

где суммирование осуществляется по тем индексам i, для которых выполняется условие (8).

Не влияя на общность задачи, можно предположить, что

$$2\pi\sum_{i=1}^{\infty}\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \le \frac{\pi}{2}.$$

Теперь пусть $-\tau < \phi < \frac{\pi}{2} + \tau$ и $\Theta_j \le \varphi < \Theta_{j+1}$ (случай, когда $e^{i\phi}$ лежит в одну сторону от точек λ_j, для которых $1-\beta_j \ge \left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}$ не различается существенно от исследуемого случая). Тогда в силу выбора точек λ_i имеем

$$\phi - \Theta_i > \frac{1}{2}\left\{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{i+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_{j-1};\omega\right)\right]^{-1}\right\}, \text{ если } i < j;$$

$$\Theta_i - \phi > \frac{1}{2}\left\{\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+2};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_{i-1};\omega\right)\right]^{-1}\right\}, \text{ если } i > j+1;$$

$$\phi - \Theta_i > \frac{1}{2}\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}, \text{ если } i = j;$$

$$\Theta_i - \phi > \frac{1}{2}\left[C\left(\beta_{i+1};\omega\right)\right]^{-1}, \text{ если } i = j+1.$$

Стоящую в правой части (11) сумму для $\Theta_j \le \phi < \Theta_{j+1}$ можем теперь оценить следующим образом:

$$\sum_i \frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-2}}{\sin^2\frac{\Theta_i - \phi}{2}} \le const\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{i+1};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_{j-1};\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 + $$
$$+\sum\left(\frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+2};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_{i-1};\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 + 4. \quad (12)$$

В силу (iii) леммы (2.1) первая сумма правой части (12) ограничена некоторым числом C_2, которое не зависит ни от n, ни от ϕ. Оценим сверху вторую сумму правой части (12):

$$\sum\left(\frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}}{\left[C\left(\beta_{j+1};\omega\right)\right]^{-1} + \left[C\left(\beta_{j+2};\omega\right)\right]^{-1} + \ldots + \left[C\left(\beta_{i-1};\omega\right)\right]^{-1}}\right)^2 \le$$
$$\le \sum\frac{\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-2}}{\left(i-j+1\right)^2\cdot\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-2}} < \frac{\pi^2}{6}$$

После этих двух замечаний из (11) и (12) получаем

$$\sum_i \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \cdot P_0\left(\Theta_i - \phi; \frac{\left|\lambda_i\right|}{R_n}\right) \le C_3\,, \tag{13}$$

где суммирование сделано по тем индексам i, для которых выполняется условие (8).

Далее, пользуясь (10) и (13), из (9) получаем

$$\sum_{1-\beta_i \ge \left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}} \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \le$$

$$\le \sum_{1-\beta_i \ge \left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}} \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \cdot \sum_{0<\alpha_\mu \le R_n} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} + c_3\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\phi}\right)\right|\right\}d\varphi\,. \tag{14}$$

Очевидно, что это неравенство имеет место также для тех λ_i, для которых $\beta_i = \left|\lambda_i\right| = \alpha_i$, т.е.

$$\sum_{1-\alpha_i \ge \left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}} \left[C\left(\alpha_i;\omega\right)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \le$$

$$\le \sum_{1-\beta_i \ge \left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}} \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \cdot \sum_{0<\left|\alpha_\mu\right| \le R_n} L_{(+)}^{\omega}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} + c_3\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{\omega}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\phi}\right)\right|\right\}d\phi\,. \tag{15}$$

Известно [2], что если последовательность $\left\{\alpha_\mu\right\}$ удовлетворяет условию теоремы, а $\omega\left(x\right) \in \Omega$ не убывает на $\left[0,1\right)$, то

$$B_\omega\left(z,\alpha_\mu\right) = B\left(z,\alpha_\mu\right)\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\gamma}z;\omega\right)d\psi\left(\gamma\right)\right),\ \left|z\right| < 1\,,$$

где $B\left(z,\alpha_\mu\right)$ - обычное произведение Бляшке, а $\psi\left(\gamma\right)$ - некоторая неубывающая, ограниченная на $\left[0;2\pi\right]$ функция. Примем, что равенство справедливо также для каждого фактора произведения $B_\omega\left(z,\alpha_\mu\right)$, т.е. для каждого μ

$$A_\omega\left(z,\alpha_\mu\right) = \frac{\alpha_\mu - z}{1-\bar{\alpha}_\mu z}\frac{\left|\alpha_\mu\right|}{\alpha_\mu}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\gamma}z;\omega\right)d\psi\left(\gamma\right)\right\},\ \left|z\right| < 1\,.$$

Отсюда следует, что

$$\ln\left|A_\omega\left(\frac{\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right| = \ln\left|\frac{\dfrac{\alpha_\mu}{R_n} - \dfrac{\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n}}{1-\dfrac{\bar{\alpha}_\mu\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n}}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\gamma;r;\omega\right)d\psi\left(\gamma\right).$$

Тем самым

$$L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{\left|\lambda_i\right|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} = 0\,.$$

Следовательно, из (14) получим

$$\sum_{1-\alpha_i \geq \left[2C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1}} \left[C\left(\alpha_i;\omega\right)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \leq c_3 \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\phi}\right)\right|\right\} d\phi\,, \tag{16}$$

чем и завершим доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М.М. *Теория факторизации функций, мероморфных в круге*// Математический сб.- 1969.- Т.79(121).- С. 517-615.
2. Джрбашян М.М., Закарян В.С. *Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге*.- М.: Изд. фирма "Физико-математическая литература" ВО "Наука", 1993.
3. Джрбашян М.М., Закарян В.С. *Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида*// Известия АН СССР. Серия математическая.- 1970.- 34.-С. 1262-1339.
4. Джрбашян А.М., Закарян В.С. *Современное развитие в теории факторизации М.М. Джрбашяна и прилежащих задачах анализа*// Известия НАН Армении. Математика.- 2009.- Т.44, N6.- С. 5-62.
5. Джрбашян А.М. *О расширении теории факторизации М.М. Джрбашяна //* Изв. НАН Армении. Математика.- 1995.-30 (2).- С. 39-61.
6. Нафталевич А.Г. *Об интерполировании функций ограниченного вида*//Ученые записки Вильнюсского университета.- 1956.- N5.- С. 5-27.

Материал поступил в редакцию 08.02.2013.

ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ω–ԲՆՈՒԹԱԳՐՉՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ.Ս. Զաքարյան, Ա.Մ. Ջրբաշյան, Ռ.Վ. Դալլաքյան

Չնվազող $\omega(x)$ պարամետրի համար գտնված է մի պայման, որից հետևում է, որ շրջանում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիայի $T_\omega(r,f)$ բնութագրիչը անսահմանափակ է:

Առանցքային բառեր: Ռիման-Լյուվիլի ընդհանրացված օպերատոր, Բլյաշկեի արտադրյալներ, Ջրբաշյանի կորիզներ:

ON ω-CHARACTERISTICS OF ANALYTIC IN A CIRCLE FUNCTIONS

V.S. Zakaryan, A.M. Jrbashyan, R.V. Dallakyan

For the non-decreasing parameter $\omega(x)$ a condition is found such that the $T_\omega(r,f)$ characteristic of the analytic in a circle function $f(z)$ is bounded.

Keywords: Rieman-Luiville operator, Blyashke product, Jrbashyan kernel.

УДК 517.57

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАММА - ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

А.Л. Григорян

(Государственный инженерный университет Армении (Политехник))

Получены формулы для гамма - функции Эйлера $\Gamma(x)$ и $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

***Ключевые слова*:** гамма - функция, ряд.

Следующий интеграл:

$$\Gamma\left(x\right) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

который сходится при любом $x > 0$, определяет гамма - функцию.

Функция $\Gamma\left(x\right)$ после элементарных операций является одной из важнейших функций для анализа и ее приложений.

В настоящей работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Справедливы формулы*

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sin\frac{r}{p}\pi \sum_{n=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{np+r}{pm}\right)\Gamma\left(1-\frac{np+r}{pm}\right) =$$
$$= \frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{p-1} A_v\left(p\right)\left[\sum_{r=1}^{vm}\left(\Psi\left(1-\frac{2k-1}{2pm}\right) - \Psi\left(1+\frac{2k-1}{2pm}\right) + \frac{2pm}{2k-1}\right)\right],$$

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sin\frac{r}{p}\pi \sum_{n=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{np+r}{pm}\right)\Gamma\left(1-\frac{np+r}{pm}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{p-1} A_v\left(p\right)\sum_{k=1}^{vm}\cos\frac{\left(2k-1\right)\pi}{2pm}\Gamma\left(1-\frac{2k-1}{2pm}\right),$$

где $A_v\left(p\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4\left(np+v\right)^2 - 1}, \quad m, p \in N$.

Доказательство. Обозначим $L_m\left(q\right) = \dfrac{1}{q}\sum\limits_{r=1}^{q-1}\dfrac{\left|\sin \pi mr / q\right|}{\sin \pi r / q}$, где $m, q \in N, m < q$.

Так как $\left|\sin x\right| = \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{v=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 vx}{4v^2 - 1}$, то

$$L_m\left(q\right) = \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{4v^2-1}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{\sin^2 \pi mvr / q}{\sin \pi r / q}.$$

Но $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(2k-1\right)x,\ n \in N$.

Поэтому, имея в виду $\sum_{k=1}^{nq} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2q = 0$, получим, что

$$L_m\left(q\right) = \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{4v^2-1}\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{vm}\sin\left(2k-1\right)\pi r / q =$$

$$= \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{4v^2-1}\sum_{k=1}^{vm}\frac{\sin\frac{q-1}{2}\left(2k-1\right)\pi / q\sin\left(2k-1\right)\pi / 2}{\sin\left(2k-1\right)\pi / 2q} = \quad (1)$$

$$= \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{4v^2-1}\sum_{k=1}^{vm} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2q = \frac{8}{\pi q}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{q\left\{vm/q\right\}} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2q}{4v^2-1},$$

где $\left\{\cdot\right\}$ – дробная часть.

При $q = p\cdot m$, где $p \in N$, из (1) получим

$$L_m\left(pm\right) = \frac{8}{\pi pm}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{p\cdot m\cdot\left\{\frac{v}{p}\right\}} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2pm}{4v^2-1} = \frac{8}{\pi pm}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=np+1}^{\left(n+1\right)p-1}\frac{\sum_{k=1}^{p\cdot m\cdot\left\{\frac{v}{p}\right\}} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2pm}{4v^2-1}. \quad (2)$$

Так как

$$\sum_{v=np+1}^{\left(n+1\right)p-1}\frac{\sum_{k=1}^{p\cdot m\cdot\left\{\frac{v}{p}\right\}} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2pm}{4v^2-1} = \sum_{v=1}^{p-1}\frac{\sum_{k=1}^{vm} ctg\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2pm}}{4\left(np+v\right)^2-1},$$

то

$$L_m\left(pm\right) = \frac{8}{\pi pm}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=1}^{p-1}\frac{\sum_{k=1}^{vm} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2pm}{4\left(np+v\right)^2-1} =$$

$$= \frac{8}{\pi pm}\sum_{v=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{vm} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\left(np+v\right)^2-1} = \quad (3)$$

$$= \frac{8}{\pi pm}\sum_{v=1}^{p-1}A_v\left(p\right)\sum_{k=1}^{vm} ctg\left(2k-1\right)\pi / 2mp,$$

где $A_v\left(p\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\left(np+v\right)^2-1}$.

С другой стороны,

$$L_m\left(pm\right) = \frac{1}{pm}\sum_{r=1}^{pm-1}\frac{\left|\sin\pi r / p\right|}{\sin\pi r / pm} = \frac{1}{pm}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{r=np+1}^{\left(n+1\right)p-1}\frac{\sin\pi r / p}{\sin\pi r / pm}, \quad (4)$$

где

$$\sum_{r=np+1}^{(n+1)p-1}\frac{\left|\sin \pi r / p\right|}{\sin \pi r / pm}=\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\left|\sin\left(np+r\right)\pi / p\right|}{\sin \pi\left(np+r\right) / pm}=\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\sin \pi r / p}{\sin \pi\left(np+r\right) / pm}.$$

Следовательно, согласно (4) имеем

$$L_m\left(pm\right)=\frac{1}{pm}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{\sin \pi r / p}{\sin \pi\left(np+r\right) / pm}=\frac{1}{pm}\sum_{r=1}^{p-1}\sin \pi r / p\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{\sin \pi\left(np+r\right) / pm}. \quad (5)$$

Используя формулы для гамма- и пси- функции (см. [1], ст. 82; 84)

$$\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(1-x\right)=\frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad \pi ctg\pi x=\Psi\left(1-x\right)-\Psi\left(1+x\right)+\frac{1}{x},$$

из (5) и (3) получим

$$L_m\left(pm\right)=\frac{1}{\pi pm}\sum_{r=1}^{p-1}\sin \pi r / p\sum_{n=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{np+r}{pm}\right)\Gamma\left(1-\frac{np+r}{pm}\right), \quad (6)$$

$$L_m\left(pm\right)=\frac{8}{\pi^2 pm}\sum_{v=1}^{p-1}A_v\left(p\right)\left[\sum_{k=1}^{vm}\left(\Psi\left(1-\frac{2k-1}{2pm}\right)-\Psi\left(1+\frac{2k-1}{2pm}\right)+\frac{2pm}{2k-1}\right)\right]. \quad (7)$$

Из (6), (7) и (3), (6) получим доказательство теоремы.

Следствие 1. *В частности, при* $p=2$ *имеем*

$$\sum_{n=1}^{m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2m}\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\Psi\left(1-\frac{2n-1}{4m}\right)-\Psi\left(1+\frac{2n-1}{4m}\right)+\frac{4m}{2n-1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{m}\cos\frac{\left(2n-1\right)\pi}{4m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{4m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{4m}\right)=\sum_{n=1}^{m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2m}\right).$$

Следствие 2. *Из* (3), (5) *имеем*

$$\frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{p-1}A_v\left(p\right)\sum_{k=1}^{vm}ctg\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2pm}=\sum_{r=1}^{p-1}\sin\frac{\pi r}{p}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{\sin \pi\left(np+r\right) / pm},$$

откуда при $m=1$ получим

$$\sum_{v=1}^{p-1}A_v\left(p\right)\sum_{k=1}^{v}ctg\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2p}=\frac{\left(p-1\right)\pi}{8}. \quad (8)$$

Откуда, если $p=2$, имеем $A_1\left(2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(4n+2\right)^2-1}=\frac{\pi}{8}$.

При $p=3$ из (8) следует $A_1\left(3\right)+A_2\left(3\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Учитывая, что

$$A_1\left(3\right)+A_2\left(3\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(6n+1\right)\left(6n+5\right)},$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(6n+1\right)\left(6n+5\right)}=\frac{\pi\sqrt{3}}{24}\,.$$

Формула (8) дает возможность вычислить сумму следующих рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=1}^{p-1}\frac{\sum_{k=1}^{v}ctg\left(2k-1\right)\pi\ /\ 2p}{\left(2np+2v\right)^{2}-1}=\frac{\left(p-1\right)\pi}{8},p\in N\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по специальным функциям.- М.: Наука, 1979.

Материал поступил в редакцию 15.02.2013.

ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ ԷՅԼԵՐԻ ԳԱՄՄԱ - ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.Լ. Գրիգորյան

Ստացված են բանաձևեր Էյլերի $\Gamma(x)$ ֆունկցիայի և $\Psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ համար:

Առանցքային բառեր. գամմա - ֆուկցիա, շարք:

FORMULAS FOR EULER GAMMA FUNCTION

A.L. Grigoryan

Formulas for Euler gamma function $\Gamma(x)$ and $\Psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ are received.

Keywords: gamma function, series.

УДК 517.969

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИ–ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕМПЕРАТУРНОГО СКАЧКА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

В.М. Кахкцян, А.Н. Афян
(Московский государственный горный университет,
Армянский национальный аграрный университет)
E-mail: varazdat1948@mail.ru, ashot1948@gmail.com

Задача температурного скачка в кинетической теории газов описывается системой линейных интегральных уравнений с 2х2 матричным симметричным знакопеременным ядром, соответствующий интегральный оператор которого является необратимым. В работе предлагается аналитически-численный подход к решению указанной задачи с применением метода специальной факторизации. Приведены результаты численных расчетов и найдено значение коэффициента температурного скачка.

Ключевые слова: специальная факторизация, уравнение Больцмана, консервативность, система интегральных уравнений, коэффициент температурного скачка.

1°. Постановка задачи. Специальная факторизация. Известно, что задача течения разреженного газа в полупространстве $x > 0$, ограниченном плоской твердой стенкой $x = 0$, описывается линеаризованным уравнением Больцмана, которое в рамках БГК (Бхатнагар - Гросс – Крук) модели сводится к следующему интегродифференциальному уравнению (см. [1-6]):

$$s_1 \frac{\partial h(x,\vec{s})}{\partial x} + h(x,\vec{s}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{s},\vec{s}')e^{-s'^2} h(x,\vec{s}')d^3s' \quad s > 0, \tag{1}$$

где $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ - вектор скорости молекул; $s_1, s_2, s_3 \in (-\infty, +\infty)$; $h(x,\vec{s})$ - искомая функция распределения молекул, а

$$K(\vec{s},\vec{s}') = 1 + 2\vec{s}\vec{s}' + \frac{2}{3}(s^2 - \frac{3}{2})(s'^2 - \frac{3}{2})\,. \tag{2}$$

К уравнению (1) присоединим граничное условие

$$h^+(0,s_1,s_2,s_3) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} h^-(0,p_1,p_2,p_3)d^3p + \varepsilon h^-(0,s_1,s_2,s_3)\,. \tag{3}$$

Здесь h^+ и h^- - функции, описывающие распределение по скоростям для молекул, двигающихся соответственно в сторону стенки и от нее:

$$h^+(x,\vec{s}) = \begin{cases} h(x,s_1,s_2,s_3), & \text{если} \quad s_1 > 0, \\ 0, & \text{если} \quad s_1 < 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$h^-(x,\vec{s}) = \begin{cases} h(x,-s_1,s_2,s_3), & \text{если} \quad s_1 > 0, \\ 0, & \text{если} \quad s_1 < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$0 \le \varepsilon \le 1$ - так называемый коэффициент аккомодации. Условие (3) при $\varepsilon \neq 0$ соответствует частично диффузному и частично зеркальному отражению молекул от границы $x = 0$. В настоящей работе мы будем рассматривать только диффузное отражение молекул от границы $x = 0$, т.е. случай $\varepsilon = 0$. Случаю $\varepsilon \neq 0$ предполагается посвятить отдельную работу.

Искомые функции $\Im(x)$ и $N(x)$, представляющие собой поправки температуры и концентрации по отношению к равновесному состоянию, определяются из соотношений (см. [4])

$$N(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} h(x,\vec{s}) d^3 s \,, \tag{6}$$

$$\Im(x) = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} (s^2 - \frac{3}{2}) h(x,\vec{s}) d^3 s \,. \tag{7}$$

Краевая задача (1)-(3) относительно функций $f_1(x) = N(x)$, $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Im(x)$ сводится к следующей системе интегральных уравнений с 2x2 матричным симметричным ядром (см. [6]):

$$f_i(x) = C g_i(x) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_0^{\infty} K_{ij}(x-t) f_j(t) dt, \tag{8}$$

где

$$K_{ij}(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p) dp \,, \tag{9}$$

$$G_{11}(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi} p} e^{-p^2}, \quad G_{22}(p) = \frac{2}{3\sqrt{\pi} p} e^{-p^2} [(p^2 - \frac{1}{2})^2 + 1] \,, \tag{10}$$

$$G_{21}(p) = G_{12}(p) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{1}{p} e^{-p^2} (p^2 - \frac{1}{2}) \,, \tag{11}$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2} \frac{dp}{p}, \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2} (p^2 - \frac{1}{2}) dp, \tag{12}$$

$$C = \int\limits_0^{\infty} f_1(t) g_1(t) dt + \int\limits_0^{\infty} f_2(t) g_2(t) dt \,.$$

Следуя работе [4], предположим, что поправки температуры и концентрации удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to \infty} \frac{d\Im}{dx} = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{dN}{dx} = -1. \tag{13}$$

Последнее означает, что в бесконечности имеется источник тепла, который обуславливает следующую асимптотику безразмерной температуры: $T(x) \sim x$ при $x \to +\infty$. Коэффициент температурного скачка определяется формулой

$$\zeta = \lim_{x\to\infty}[\Im(x) - x]. \qquad (14)$$

В силу линейности системы (8) ее решение можно представить в виде

$$f_i = C\psi_i + \varphi_i \quad (i = 1,2), \qquad (15)$$

где ψ_i и ϕ_i - решение однородных и неоднородных систем интегральных уравнений соответственно:

$$\psi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\psi_j(t)dt\,, \qquad (16)$$

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\phi_j(t)dt\,. \qquad (17)$$

Умножая первое из уравнений (15) на $2g_1(x)$, а второе - на $2g_2(x)$ и интегрируя по x от 0 до $+\infty$, будем иметь

$$C = \frac{B}{1-A}, \quad A \neq 1, \qquad (18)$$

где

$$B = 2\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \varphi_i(t)g_i(t)dt, \quad A = 1 - 2\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \psi_i(t)g_i(t)dt\,. \qquad (19)$$

Перепишем уравнения (16) и (17) в операторной форме:

$$(J - \hat{K})\psi = g\,, \qquad (20)$$

$$(J - \hat{K})\phi = 0\,. \qquad (21)$$

Здесь $g = (g_1, g_2)^T$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ - заданные и искомые векторы – столбцы (T – знак транспонирования); J - единичный оператор; $\hat{K} = (K_{ij})_{i,j=1,2}$ - матричный оператор Винера–Хопфа:

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \qquad (22)$$

в котором ядро K определяется согласно (9).

Заметим, что $G(p) = (G_{ij}(p))_{i,j=1,2}$ - знакопеременная измеримая матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$G(p)p \in L_1^{2\times 2}(0,+\infty); \quad 2\int_0^\infty G(p)pdp = I\,, \qquad (23)$$

где $I = (\delta_{ij})_{i,j=1,2}$ - единичная матрица. Из (23) следует, что

$$K \in L_1^{2\times 2}(-\infty,+\infty); \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = I\,. \qquad (24)$$

Равенство в (24) играет существенную роль в дальнейших наших рассуждениях.

Пусть E - одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,+\infty)$, $p \geq 1$; $M(0,+\infty) = L_\infty(0,+\infty)$, $C_l(0,+\infty)$. Обозначим через $E^2 = E \times E$ пространство двумерных векторов–столбцов с элементами из пространств E.

Вопрос обратимости оператора $J - \hat{K}$ в пространствах E^2 и другие его важные свойства определяются с помощью символа $I - \overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{isx}dx$ - преобразование Фурье (покомпонентное).

Согласно общей теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа (см. [7-9]), одним из необходимых условий для обратимости оператора $J - \hat{K}$ в любом из пространств E^2 является отличие от нуля детерминанта символа оператора $\hat{K}$, т.е.

$$\det[I - \overline{K}(s)] \neq 0, \quad s \in (-\infty, +\infty). \tag{25}$$

Однако из равенства (24) следует, что условие (25) для системы (20) (или (21)) в точке $s = 0$ нарушается, т.е. $\det[I - \overline{K}(0)] \equiv 0$, и оператор $(J - \hat{K})$ необратим в E^2. Следовательно, система (20) (или (21)) выпадает из общей теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа и относится к особым случаям. В дальнейшем мы будем предполагать, что для оператора $\hat{K}$ имеет место: $\det[I - \overline{K}(s)] \neq 0, \quad \forall s \neq 0.$ Ниже будет показано, что системы (20) и (21) имеют решения, несмотря на то, что символ $I - \overline{K}(s)$ имеет ноль четвертого порядка в точке $s = 0$. Мы будем использовать метод специальной факторизации, который исходит из факторизационной интерпретации метода "Albedo-shifting (см. [10; 11]) и был применен в работах [5; 6].

В работах [5; 6] доказано, что для $\forall \beta > 0$ имеет место факторизация

$$I - \overline{K}(s) = (I - \hat{U}_\beta^{\,-})(J - \hat{T}_\beta)(I - \hat{U}_\beta^{\,+}) \tag{26}$$

как равенство операторов, действующих в E^2, где

$$(\hat{U}^+)(x) = \beta \int\limits_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t)dt, \tag{27}$$

$$(\hat{U}^-)(x) = \beta \int\limits_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t)dt, \tag{28}$$

$\hat{T}$ - оператор Винера–Хопфа с ядром:

$$T(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G(p)(1 - p^2\beta^2)dp. \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что

$$\overline{T}(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}T(x)dx=\begin{pmatrix}1-a_{11}\beta^2 & -a_{12}\beta^2\\ -a_{21}\beta^2 & 1-a_{22}\beta^2\end{pmatrix},\qquad (30)$$

где $A=(a_{ij})=2\int\limits_0^{\infty}G_{ij}(p)p^3dp.$ С учетом (10), (11), (30) имеем

$$\det[I-\overline{T}(0)]=\det(A)\cdot\beta^4\neq\frac{5}{12}\beta^4,\quad \forall\beta>0.$$

Операторы $J-\hat{U}^{\pm}$, фигурирующие в (26), необратимы в пространствах E^2, поскольку $I-\hat{U}^{\pm}(0)=0.$ Из (30) видно, что символ $I-\overline{T}$ в точке $s=0$ для $\forall\beta>0$ отличен от нуля. Предполагая, что символ исходного оператора $\hat{K}$ не имеет других нулей, т.е. $\det[I-\overline{K}(s)]\neq 0,\quad s\neq 0$, легко можно установить отсутствие других нулей символа оператора $J-\hat{T}$. Из результатов работы $[5;9]$ следует, что символ оператора $J-\hat{K}$ равен произведению символов операторов, фигурирующих в (26). Поэтому имеет место следующее равенство:

$$J-\hat{K}=(J-\hat{U}^-)\ (J-\hat{T})\ (J-\hat{U}^+)\qquad (31)$$

как равенство операторов, действующих в E.

Пусть $f\in E^2$ - произвольная вектор–функция. Рассмотрим вектор–функцию $\phi=\hat{T}f$, где $\phi=(\phi_1,\phi_2)^T$; $f=(f_1,f_2)^T$; $\hat{T}=(T_{ij})$ - матричный интегральный оператор. Оценим норму функции в каждом из пространств E^2.

Как известно, в любом из пространств E^2 имеет место оценка

$$\left\|\phi\right\|_{E^2}\leq\max(\lambda(\beta);\mu(\beta))\cdot\left\|f\right\|_{E^2},\qquad (32)$$

$$\begin{aligned}\lambda(\beta)&\equiv\left\|\hat{T}_{11}\right\|_{L_1\to L_1}+\left\|\hat{T}_{12}\right\|_{L_1\to L_1}\geq\left\|\hat{T}_{21}\right\|_{E\to E}+\left\|\hat{T}_{22}\right\|_{E\to E},\\ \mu(\beta)&\equiv\left\|\hat{T}_{21}\right\|_{L_1\to L_1}+\left\|\hat{T}_{22}\right\|_{L_1\to L_1}\geq\left\|\hat{T}_{21}\right\|_{E\to E}+\left\|\hat{T}_{22}\right\|_{E\to E}.\end{aligned}\qquad (33)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}&\left\|T\phi\right\|_{E^2}=\left\|T_{11}\phi_1+T_{12}\phi_2\right\|_E+\left\|T_{21}\phi_1+T_{12}\phi_2\right\|_E\leq\\ &\leq\left(\left\|T_{11}\right\|_{E\to E}+\left\|T_{21}\right\|_{E\to E}\right)\cdot\left\|\phi_1\right\|_E+\left(\left\|T_{12}\right\|_{E\to E}+\left\|T_{22}\right\|_{E\to E}\right)\cdot\left\|\phi_2\right\|_E\leq\\ &\leq\max(\lambda(\beta);\mu(\beta))\cdot\left\|\phi\right\|_{E^2}.\end{aligned}$$

Для того чтобы интегральный (матричный) оператор $\hat{T}$ был сжимающим, достаточно, чтобы $\exists\beta>0,$ такое, что (см. $[12]$)

$$\sigma=\max(\lambda(\beta)\mu(\beta))<1.\qquad (34)$$

С учетом (29) можно убедиться, что $\sigma=\max(\lambda(\beta)\mu(\beta))<1$ при $\beta\in(0;1)$. Так, например, если $\beta=0.8,$ то $\sigma=0.946.$

2^0. Применение факторизации к решению системы уравнений (20), (21). Сначала рассмотрим уравнение (20). Факторизация (31) сводит его к последовательному решению следующих связанных уравнений:

$$(J-\hat{U}_-)\delta = g; \tag{35}$$

$$(J-\hat{T})F = \rho; \tag{36}$$

$$(J-\hat{U}_+)\psi = F. \tag{37}$$

Решая операторное уравнение, (35) получим два несвязанных уравнения для определения элементов вектора $\rho = (\rho_1;\rho_2)^T$:

$$\rho_k(x) = g_k(x) + \beta\int\limits_x^\infty e^{-\beta(t-x)}\rho_k(t)dt, \qquad k=1,2. \tag{38}$$

Легко проверить, что решение этих уравнений имеет вид

$$\rho_k(x) = g_k(x) + \beta\int\limits_x^\infty g_k(t)dt \in L_1\left(0;\infty\right) \quad (k=1,2)\,. \tag{39}$$

Теперь рассмотрим уравнение (36). В силу того, что в пространствах E^2 оператор $\hat{T}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\sigma<1$ и $\rho \in L_1^{\,2}(0,+\infty)$, уравнение (36) имеет решение

$$F \in L_1^{\,2}(0,+\infty)\,. \tag{40}$$

Наконец, решение уравнения (37), а следовательно, и решение исходного уравнения (20) или (16) имеют вид

$$\psi_i(x) = F_i(x) + \beta\int\limits_0^x F_i(t)dt, \quad i=1,2, \tag{41}$$

где

$$F_i(x)\in L_1(0,+\infty); \quad \beta\int\limits_0^x F_i(t)dt \in C_l(0,+\infty), \quad i=1,2. \tag{42}$$

Перейдем теперь к вопросу разрешимости уравнения (17) или (21). Применим факторизацию (31) к уравнению (21):

$$(J-\hat{U}_-)\tilde{\rho} = 0; \tag{43}$$

$$(J-\hat{T})Q = \tilde{\rho}; \tag{44}$$

$$(J-\hat{U}_+)\phi = Q\,. \tag{45}$$

Заметим, что вектор-столбец $\tilde{\rho} = (1;1)^T$ удовлетворяет уравнению (43). Поскольку оператор $\hat{T}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\sigma<1,$ и $\tilde{\rho}\in L_\infty^{\,2}(0,+\infty),$ то уравнение (44) имеет решение $Q \in L_{\infty}^{2\times 2}(0,+\infty)$. Решение исходного уравнения (17) имеет вид

$$\phi_i(x) = Q_i(x) + \beta \int_0^x Q_i(t)dt = O(x) \;\; (i=1,2) \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{46}$$

Окончательное решение исходной системы уравнения (8) принимает вид

$$f_1(x) = N(x) = CF_1(x) + C\beta \int_0^x F_1(t)dt + Q_1(x) + \beta \int_0^x Q_1(t)dt\,, \tag{47}$$

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Im(x) = CF_2(x) + C\beta \int_0^x F_2(t)dt + Q_2(x) + \beta \int_0^x Q_2(t)dt. \tag{48}$$

3^0. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ, РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ. Опишем алгоритм решения и приведем некоторые численные результаты.

ШАГ 1. Перепишем уравнение (44) в раскрытой форме и применим следующую итерацию:

$$Q_i^{(n+1)}(x) = \sum_{j=1}^{2} \int_0^{\infty} T_{ij}(x-t) Q_j^{(n)}(t)dt + 1, \quad Q_i^{(0)}(x) = 0,\; i=1,2; \quad n = 0,1,2,...$$

ШАГ 2. Решение уравнения (21) определяется согласно формуле (46).

ШАГ 3. Рассмотрим неоднородное уравнение (20). Из (35) имеем

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{s}} e^{-s^2} (1+\beta s) ds\,,$$

$$\rho_2(x) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{s}} e^{-s^2} (s^2 - \frac{1}{2} + \beta s^3 - \beta \frac{s}{2}) ds\,.$$

Перейдем к уравнению (36). Применим следующую итерацию:

$$F_i^{(n+1)}(x) = \rho_i(x) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^{\infty} T_{ij}(x-t) F_j^{(n)}(t)dt + 1, \quad F_i^{(0)}(x) = 0, (i=1,2),$$

$$n = 0,1,2,...$$

ШАГ 4. Решение неоднородного уравнения (20) задается формулой (41).

ШАГ 5. Согласно (18), (19), определяется значение постоянной С.

ШАГ 6. Коэффициент температурного скачка ζ вычисляется по формуле

$$\zeta = \lim_{x\to\infty} [\Im(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[CF_2(x) + C\beta \int_0^x F_2(t)dt + Q_2(x) + \beta \int_0^x Q_2(t)dt \right] - x \right\}.$$

Для коэффициента температурного скачка ζ получается $0{,}645$.

На рисунке изображены графики функций $N(x)$ и $\Im(x)$.

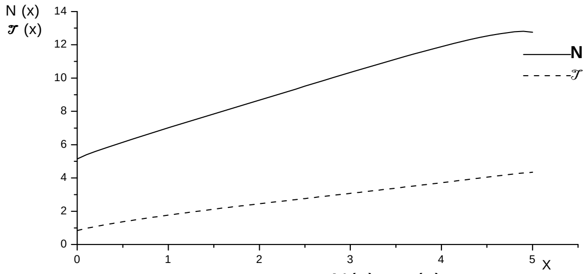

Рис.1 Графики функций N(x) и 𝒯(x).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. *Теория и приложения уравнения Больцмана.* – М.: Мир, 1978. - 495 с.
2. Andriyan S.M. and Khachatryan A.Kh. *On one Problem in Physical Kinetics//* Comp. Math. and Math. Physics.- 2005.-Vol. 45, No 11.- P. 1982-1989.
3. Loyalka S.K., Siewert C.E. and Thomas J.R. *Temperature Jump Problem with Arbitrary Accommodation* // Phys. Fluids.-1978.- Vol. 21.- P. 854-855.
4. Barichdlo L.B. and Siewert C.E. *The Temperature-Jump Problem in Rarefied-Gas Dynamics* // Eur. J. Appl. Math.- 2000.- Vol. 11.- P. 353-364.
5. Yengibaryan N.B. and Khachatryan A.Kh. *On Temperature and Density Jumps in Kinetic Theory of Gase* // Horizons in World of Physics. Nova Science Publisher.- 2003.-Vol. 240.- P. 103-117.
6. Терджян Ц.Э., Хачатрян А.Х. *Об одной системе интегральных уравнений в кинетической теории* // Жур. Выч. мат. и мат. Физики.-2009.- Т. 49, No 4.- С. 715-721.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов* // Успехи мат. наук.-1968.-Т. 13, No 2.- С. 3-72.
8. Енгибарян Н.Б., Арабаджян Л.Г. *Системы интегральных уравнений Винера-Хопфа и нелинейные уравнения факторизации* // Мат. сборник.- 1984.- Т. 124, No 6.- С. 189-216.
9. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники* // Математический анализ.- 1984.-Т. 22.- С. 175-242.
10. Ivanov V.V., Ribichi G.B. and Kasaurov A.M. *Albedo shifing* // Harward-Smitson center for Astrophysics, preprint series.- 1992.- No 3478.
11. Енгибарян Н.Б., Енгибарян Б.Н. *О методе сдвига альбедо*//Астрофизика.-1995.- Т. 38, No 3.- С. 414-431.
12. Терджян Ц.Э. *О разрешимости некоторых линейных и нелинейных задач физической кинетики*: Дис. канд. наук.- Ереван, 2011.- 88 с.

Материал поступил в редакцию 29.11.2012.

ԳԱԶԵՐԻ ԿԻՆԵՏԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻ ԹՌԻՉՔԻ ԽՆԴՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ-ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Վ.Մ. Քաղըցյան, Ա.Ն. Աֆյան

Ջերմաստիճանի թռիչքի խնդիրը նկարագրվում է 2x2 մատրիցային սիմետրիկ, նշանափոխ կորիզով գծային ինտեգրալ հավասարումների համակարգով, որի համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը ոչ շրջելի է: Կիրառելով հատուկ ֆակտորիզացիա՝ աշխատանքում առաջարկվում նշված խնդրի անալիտիկ-թվային լուծման եղանակ: Բերված են թվային հաշվումների արդյունքները, գտնվել է ջերմաստիճանի թռիչքի գործակցի արժեքը:

Առանցքային բառեր. հատուկ ֆակտորիզացիա, Բոլցմանի հավասարում, ինտեգրալ հավասարումների համակարգեր, ջերմաստիճանի թռիչքի գործակից:

ON ANALYTICAL NUMERICAL SOLUTION OF TEMPERATURE-JUMP PROBLEM OF KINETIC THEORY OF GASES

V.M. Kakhketsyan, A.N. Afyan

The temperature-jump problem is described by system of linear integral equations with 2x2 matrix, symmetric, sign variable kernel, which integral operator is noninvertible. Application of special factorization method allow us to suggest analytical – numerical approach for solution above mentioned problem. Numerical results are given and coefficient of temperature jump is found.

Keywords: special factorization, Boltzman equation, System of integral equations, temperature jump coefficient.

ISBN 1829-3344 ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ. 2013. ՀԱՏՈՐ 9, № 1

ՀՏԴ 513.813

ԼԻՈՎԻՆ ԳԵՈԴԵԶԻԿ ԵՎ ՕՄԲԻԼԻԿ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ V^n ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Գ.Ա. Նալբանդյան
(Արցախի պետական համալսարան)

Ուսումնասիրված են լիովին գեոդեզիկ և օմբիլիկ մակերևույթները: Ապացուցված է, որ M^{n_1} բազիսային բազմաձևությունների V^{n_1} դիրքային մակերևույթները լիովին գեոդեզիկ մակերևույթներ են, իսկ M^{n_2} և M^{n_3} բազիսային բազմաձևությունների V^{n_2} և V^{n_3} դիրքային մակերևույթները օմբիլիկ մակերևույթներ են:

Առանցքային բառեր. դիրքային մակերևույթ, լիովին գեոդեզիկ, թենզոր, օրթոգոնալ կոմպոզիցիա, օմբիլիկ մակերևույթ:

Դիտարկենք $V^n = V^{n_1} \times V^{n_2} \times V^{n_3}$ ռիմանյան տարածությունը հետևյալ մետրիկայով`

$$ds^2 = \overset{1}{g}_{i_1k_1}\left(u^1;u^2;\ldots;u^{n_1}\right)du^{i_1}\,du^{k_1} + e^{P(u^1;u^2;\ldots;u^{n_1})}\,\overset{2}{g}_{i_2k_2}\,(u^{n_1+1};u^{n_1+2};\ldots;u^{n_1+n_2})\,du^{i_2}du^{k_2} + \\ + e^{q(U^1;U^2;\ldots;U^{n_1+n_2})}\,\overset{3}{g}_{i_3k_3}\,(u^{n_1+n_2+1};u^{n_1+n_2+2};\ldots;u^{n_1+n_2+n_3})\,du^{i_3}\,du^{k_3}\,, \quad (1)$$

որտեղ `

$i_1;k_1 = 1;2;\ldots;n_1$, $i_2;k_2 = n_1+1;n_1+2;\ldots;n_1+n_2$, $i_3;k_3 = n_1+n_2+1;n_1+n_2+2;\ldots;n_1+n_2+n_3$

ընդ որում` $n_1 + n_2 + n_3 = n$:

Այս մետրիկայով V^n տարածությունը վերածվում է M^{n_1}, M^{n_2} և M^{n_3} $\left(n_1+n_2+n_3=n\right)$ բազիսային բազմաձևությունների օրթոգոնալ կոմպոզիցիայի տարածության [1-5]:

Այդ բազմաձևությունների դիրքային մակերևույթները նշանակենք համապատասխանաբար V^{n_1} -ով, V^{n_2} -ով և V^{n_3} -ով: Այդ դեպքում V^{n_1} -մակերևույթի կետի ներքին կոորդինատները կլինեն u^{i_1} , եթե ($i_1 = \overline{1,n_1}$), V^{n_2} -մակերևույթի կետի ներքին կոորդինատները կլինեն u^{i_2} -ը, եթե $\left(i_2 = \overline{n_1+1,n_2}\right)$, և V^{n_3} -մակերևույթի կետի ներքին կոորդինատները կլինեն u^{i_3} -ը, եթե $\left(i_3 = \overline{n_2+1,n}\right)$:

Ցույց տանք, որ V^{n_1} մակերևույթները լիովին գեոդեզիկ մակերևույթներ են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1. *Լիովին գեոդեզիկ մակերևույթ կոչվում է այն մակերևույթը, որի ցանկացած գեոդեզիկ գիծ հանդիսանում է գեոդեզիկ գիծ նաև V^n տարածության համար:*

Գրենք V^{n_1} -մակերևույթի գեոդեզիկ գծի դիֆերենցիալ հավասարումները՝

$$\frac{d^2u^{i_1}}{d\sigma^2}+\Gamma^{i_1}_{j_1k_1}\frac{du^{j_1}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{j_2}}{d\sigma}=0: \tag{2}$$

Որպեսզի այս գեոդեզիկ գիծը հանդիսանա նաև գեոդեզիկ գիծ V^n տարածությունում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա՝

$$\frac{d^2u^{i}}{d\sigma^2}+\Gamma^{i}_{jk}\frac{du^{j}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k}}{d\sigma}=0\,, \tag{3}$$

որտեղ $u^i=\left(u^{i_1},\overset{0}{u}{}^{i_2},\overset{0}{u}{}^{i_3}\right)$:

Եթե (3)-ի մեջ տեղադրենք $i=i_1$ արժեքը, ապա կունենանք՝

$$\frac{d^2u^{i_1}}{d\sigma^2}+\Gamma^{i_1}_{jk}\frac{du^{j}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k}}{d\sigma}=0: \tag{4}$$

Քանի որ $u^{i_2}=\overset{0}{u}{}^{i_2}$ և $u^{i_3}=\overset{0}{u}{}^{i_3}$, ապա (4)-ից կստացվի՝

$$\frac{d^2u^{i_1}}{d\sigma^2}+\Gamma^{i_1}_{jk}\frac{du^{j_1}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k_1}}{d\sigma}=0\ : \tag{5}$$

Ըստ [5]-ի (6) պայմանի $\Gamma^{i_1}_{j_1k_1}=\overset{1}{\Gamma}{}^{i_1}_{j_1k_1}$, հետևաբար (5)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2u^{i_1}}{d\sigma^2}+\overset{1}{\Gamma}{}^{i_1}_{j_1k_1}\frac{du^{j_1}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k_1}}{d\sigma}=0: \tag{6}$$

Ուրեմն՝ (6)-ը համընկնում է (2)-ին: Հետևաբար, (3)-ը տեղի ունի $i=i_1$ դեպքում:

Այժմ (3)-ում տեղադրենք $i=i_2$, և հաշվի առնելով, որ $u^{i_2}=\overset{0}{u}{}^{i_2}$, ապա կստացվի՝

$$\Gamma^{i_2}_{j_1k_1}\frac{du^{j_1}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k_1}}{d\sigma}=0\ : \tag{7}$$

Ըստ [5]-ի (6) պայմանի՝ $\Gamma^{i_2}_{j_1k_1}=0$, հետևաբար, (7)- հավասարումը տեղի ունի: Այսինքն՝ տեղի ունի (3)-ը նաև $i=i_2$ դեպքում:

Այժմ (3)-ում տեղադրենք $i=i_3$, և հաշվի առնելով, որ $u^{i_3}=\overset{0}{u}{}^{i_3}$, ապա կստանանք՝

$$\Gamma^{i_3}_{j_1k_1}\frac{du^{j_1}}{d\sigma}\cdot\frac{du^{k_1}}{d\sigma}=0\ : \tag{8}$$

Ըստ [5]-ի (6) պայմանի՝ $\Gamma^{i_3}_{j_1k_1}=0$, հետևաբար (8)- հավասարումը տեղի ունի: Այսինքն՝ (3)-ը տեղի ունի նաև $i=i_3$ դեպքում [4-5]: Այսպիսով, ապացուցվեց, որ (2)-ից բխում է (3)-ը:

Հետևաբար, V^{n_1}-մակերևույթի ցանկացած գեոդեզիկ գիծ հանդիսանում է գեոդեզիկ գիծ նաև V^n-տարածությունում:

Այժմ ցույց տանք, որ V^{n_2} դիրքային մակերևույթները հանդիսանում են օմբիլիկ մակերևույթներ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2. *Մակերևույթը տրված նորմալի նկատմամբ կոչվում է օմբիլիկ, եթե նրա կամայական գիծը հանդիսանում է կորության գիծ այդ նորմալի նկատմամբ:*

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3. *Եթե մակերևույթը օմբիլիկ է իր ցանկացած նորմալի նկատմամբ, ապա այն կոչվում է օմբիլիկ մակերևույթ:*

ԹԵՈՐԵՄ 1. *Որպեսզի մակերևույթը լինի օմբիլիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ցանկացած երկրորդ թենզորը լինի՝ կամ համեմատական առաջին թենզորին, կամ հավասար զրոյի:*

Գրենք V^{n_2}-մակերևույթի պարամետրական հավասարումները՝

$$\begin{cases} u^{i_1}=\overset{0}{u}{}^{i_1}, \\ u^{i_2}=u^{i_2}, \\ u^{i_3}=\overset{0}{u}{}^{i_3}\ : \end{cases} \tag{9}$$

(9)-ից հետևում է, որ V^{n_2}-մակերևույթի շոշափող միավոր վեկտորները կլինեն $\xi^i_{j_2}=\left(0;\ \xi^{i_2}_{j_2};\ 0\right)$, որտեղ $\xi^{i_2}_{j_2}=\delta^{i_2}_{j_2}$: Իսկ որպես միավոր նորմալ վեկտորներ կարող ենք ընտրել $\underset{s_1}{\upsilon^i}=\xi^i_{s_1}$ և $\underset{s_3}{\upsilon^i}=\xi^i_{s_3}$ վեկտորները, որտեղ $\xi^i_{s_1}=\delta^i_{s_1}$ և $\xi^i_{s_3}=\delta^i_{s_3}$:

Գրենք V^{n_2} մակերևույթի դերիվացիոն հավասարումները՝

$$\nabla_{k_2}\xi^i_{j_2}=\overset{s_1}{b}_{k_2j_1}\underset{s_1}{\upsilon^i}+\overset{s_2}{b}_{k_2j_2}\underset{s_2}{\upsilon^i}, \tag{10}$$

որտեղ $\overset{s_1}{b}_{k_2j_2}$-ը և $\overset{s_3}{b}_{k_2j_2}$-ը V^{n_2}-մակերևույթի երկրորդ թենզորներն են:

Եթե (10)-հավասարումը գրենք բացված տեսքով և դրանում տեղադրենք $\underset{s_1}{\upsilon^i}=\xi^i_{s_1}$ և $\underset{s_3}{\upsilon^i}=\xi^i_{s_3}$ արժեքները, ապա կստանանք՝

$$\partial_{k_2}\xi^i_{j_2} - \overset{2}{\Gamma}{}^{s_2}_{k_2 j_2}\,\xi^i_{s_2} + \Gamma^i_{kj}\xi^k_{k_2}\xi^j_{j_2} = \overset{s_1}{b}_{k_2 j_1}\,\upsilon^i_{s_1} + \overset{s_2}{b}_{k_2 j_2}\,\upsilon^i_{s_3}\,: \qquad (11)$$

Եթե (11)-ում տեղադրենք $i = i_1$, և հաշվի առնելով, որ $\xi^i_k = \delta^i_k$, կստանանք՝

$$\overset{i_1}{b}_{k_2 j_2} = \Gamma^{i_1}_{k_2 j_2}\,: \qquad (12)$$

(11)-ից նույն կերպ՝ $i = i_3$ դեպքում կստանանք՝

$$\overset{i_3}{b}_{k_2 j_2} = \Gamma^{i_3}_{k_2 j_2}\,: \qquad (13)$$

Ըստ [5]-ի (6)-ի $\Gamma^{i_1}_{k_2 j_2} = -P^{i_1} g_{k_2 j_2}$, հետևաբար, (12)-ից կստացվի՝

$$\overset{i_1}{b}_{k_2 j_2} = -P^{i_1} g_{k_2 j_2}\,: \qquad (14)$$

Ըստ [5]-ի՝ (8)-ի $\Gamma^{i_3}_{k_2 j_2} = 0$, հետևաբար, (13)-ից կստացվի՝

$$\overset{i_3}{b}_{k_2 j_2} = 0: \qquad (15)$$

Ուրեմն (14)-ից և (15)-ից կստացվի՝

$$\begin{cases} \overset{i_1}{b}_{k_2 j_2} = \mathrm{A}^{i_1} g_{k_2 j_2}, \\ \overset{i_3}{b}_{k_2 j_2} = A^{i_3} g_{k_2 j_2}, \end{cases} \qquad (16)$$

որտեղ $A^{i_1} = -P^{i_1}$, $A^{i_3} = 0$: Հաշվի առնելով, որ (16)-ի մեջ $g_{k_2 j_2}$-ը հանդիսանում են V^{n_2}-մակերևույթի առաջին թենզորները, ապա կնշանակի, որ տեղի ունի օմբիլիկության պայմանը V^{n_2}-մակերևույթի համար: Հետևաբար, մեր պնդումն ապացուցված է:

Այժմ ցույց տանք, որ V^{n_3}- մակերևույթը նույնպես հանդիսանում է օմբիլիկ մակերևույթ: V^{n_3}-մակերևույթի շոշափող միավոր վեկտորները կլինեն $\xi^i_{i_3} = \delta^i_{i_3}$ վեկտորները, իսկ միավոր նորմալ վեկտորները կլինեն $\xi^i_{i_1} = \delta^i_{i_1}$ և $\xi^i_{i_2} = \delta^i_{i_2}$ վեկտորները:

Գրենք V^{n_3}-մակերևույթի դերիվացիոն հավասարումները՝

$$\nabla_{k_3}\xi^i_{j_3} = \overset{s_1}{b}_{k_3 j_3}\,\xi^i_{s_1} + \overset{s_2}{b}_{k_3 j_3}\,\xi^i_{s_2}\,,$$

կամ

$$\partial_{k_3}\xi^i_{j_3} - \overset{3}{\Gamma}{}^{s_3}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_3} + \Gamma^i_{kj}\xi^k_{k_3}\xi^j_{j_3} = \overset{s_1}{b}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_1} + \overset{s_2}{b}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_2} ,$$

կամ

$$-\overset{3}{\Gamma}{}^{s_3}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_3} + \Gamma^i_{k_3 j_3} = \overset{s_1}{b}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_1} + \overset{s_2}{b}_{k_3 j_3}\xi^i_{s_2} : \tag{17}$$

Եթե (17)-ի մեջ տեղադրենք $i = i_1$ արժեքը, ապա կստանանք՝

$$\Gamma^{i_1}_{k_3 j_3} = \overset{i_1}{b}_{k_3 j_3} : \tag{18}$$

Ըստ [5]-ի (6) պայմանից ունենք՝ $\Gamma^{i_1}_{k_3 j_3} = -q^{i_1} g_{k_3 j_3}$, հետևաբար, (18)-ից կստանանք՝

$$\overset{i_1}{b}_{k_3 j_3} = -q^{i_1} g_{k_3 j_3} : \tag{19}$$

Եթե (17)-ի մեջ տեղադրենք $i = i_2$ արժեքը, ապա կստանանք՝

$$\Gamma^{i_2}_{k_3 j_3} = \overset{i_2}{b}_{k_3 j_3} : \tag{20}$$

Ըստ [5]-ի (7) պայմանից ունենք, որ $\Gamma^{i_2}_{k_3 j_3} = -q^{i_2} g_{k_3 j_3}$, հետևաբար, (20)-ից կստանանք՝

$$\overset{i_2}{b}_{k_3 j_3} = -q^{i_2} g_{k_3 j_3} : \tag{21}$$

Այսպիսով, (19)-ից և (21)-ից բխում է, որ V^{n_3}-ը նույնպես օմբիլիկ մակերևույթ է:

Ուրեմն մեր պնդումն ապացուցված է:

Այժմ պարզենք, թե անալոգիայի համապատասխանությունը ինչպիսի՞ արտապատկերում է V^{n_1} տեսքի դիրքային մակերևույթների միջև: V^{n_1} մակերևույթի մետրիկական թենզորը կլինի՝ $\overset{1}{g}_{i_1 j_1}\left(u^1, u^2, ..., u^{n_1}\right) = g_{i_1 j_1}(u^{k_1})$ տեսքի: Մի դիրքային V^{n_1}- մակերևույթից մյուս V^{n_1} դիրքային մակերևույթը անցնելիս կփոփոխվեն u^{i_2} և u^{i_3} կոորդինատները, և անալոգ կետերը կունենան նույն u^{i_1} կոորդինատները:

Հաշվի առնելով, որ $g_{i_1 j_1}$ մետրիկական թենզորը մնում է նույնը, հետևաբար, անալոգիայի համապատասխանությունը կլինի իզոմետրիա այդ դիրքային մակերևույթների համար:

Գտնենք անալոգիայի համապատասխանությունը երկու V^{n_2} դիրքային մակերևույթների միջև: V^{n_2}-ի մետրիկական թենզորը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$e^{P(u^1,u^2,...,u^n)} \overset{2}{g}_{i_2 j_2}(u^{n_1+1},u^{n_1+2},...,u^{n_1+n_2})$: Մի V^{n_2} դիրքային մակերևույթից մյուս V^{n_2} դիրքային մակերևույթին անցնելիս փոփոխվում են միայն u^{i_1} և u^{i_3} կոորդինատները:

Դա նշանակում է, որ $\overset{1}{V}{}^{n_2}$ մակերևույթի համար $u^{i_1} = \overset{2}{u}{}^{i_1}$ և $u^{i_3} = \overset{2}{u}{}^{i_3}$:

Հետևաբար, $\overset{1}{V}{}^{n_2}$ մետրիկական թենզորը կլինի՝

$$e^{P(\overset{1}{u}{}^{1},\overset{1}{u}{}^{2},...,\overset{1}{u}{}^{n})} \overset{2}{g}_{i_2 j_2}(u^{n_1+1},u^{n_1+2},...,u^{n_1+n_2})$$

տեսքի, իսկ $\overset{2}{V}{}^{n_2}$ մակերևույթի համար՝

$$e^{P(\overset{2}{u}{}^{1},\overset{2}{u}{}^{2},...,\overset{2}{u}{}^{n})} \overset{2}{g}_{i_2 j_2}(u^{n_1+1},u^{n_1+2},...,u^{n_1+n_2})$$

տեսքի:

Իսկ այդ երկու թենզորները իրարից տարբերվում են միայն հաստատուն արտադրիչով, հետևաբար, $\overset{1}{V}{}^{n_2}$ և $\overset{2}{V}{}^{n_2}$ մակերևույթների միջև անալոգիայի համապատասխանությունը հանդիսանում է նմանություն:

Քանի որ $\overset{3}{g}_{i_3 j_3}$-ը կախված չէ u^{i_1} և u^{i_2} կոորդինատներից, ապա նմանատիպ դատողություններով կապացուցենք, որ երկու V^{n_3} դիրքային մակերևույթների միջև անալոգիայի համապատասխանությունը նույնպես նմանության ձևափոխություն է: Այսպիսով , ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը:

ԹԵՈՐԵՄ 2. *Եթե (1) մետրիկայով ռիմանյան V^n տարածությունը վերածվում է երեք $M^{n_1}, M^{n_2}, M^{n_3}$ բազիսային բազմաձևությունների օրթոգոնալ կոմպոզիցիայի տարածության, ապա M^{n_1} բազիսային բազմաձևության V^{n_1} դիրքային մակերևույթները լրիվին գեոդեզիկ մակերևույթներ են, և անալոգիայի համապատասխանությունը նրանցից ցանկացած երկուսի միջև իզոմետրիա է, իսկ M^{n_2} բազիսային բազմաձևության դիրքային V^{n_2} մակերևույթները օմբիլիկ մակերևույթներ են, և անալոգիայի համապատասխանությունը նրանցից ցանկացած երկուսի միջև նմանության արտապատկերումն է, M^{n_3} բազիսային բազմաձևության V^{n_3} դիրքային մակերևույթները նույնպես օմբիլիկ մակերևույթներ են, և անալոգիայի համապատասխանությունը նրանցից ցանկացած երկուսի միջև նույնպես նմանության արտապատկերումն է:*

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Каган В.Ф. *Субпроективные пространства*.- М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1961.
2. Каган В.Ф. *Основы теории поверхностей*.- Ч. 2.- М.: ОГИЗ, Гос.изд.техн-теор. лит., 1948.
3. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*.- М.: Наука, 2006.
4. Норден А.П. *Пространства декартовой композиции* // Изв.вузов. Матем.-1963.-N4.
5. Նալբանդյան Գ.Ա. *Ռիմանյան տարածության երեք բազմաձևությունների օրթոգոնալ կոմպոզիցիայի կոորդինատական ցանցի հատկությունները* // ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր.-2007.- N 1.- էջ 19-26:

Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 24.01.2013:

ОМБИЛИЧЕСКИЕ И ПОЛНОСТЬЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В V^n РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г.А. Налбандян

Исследованы омбилические и полностью геодезические поверхности в V^n римановом пространстве. Доказано, что V^{n_1} позиционные поверхности являются полностью геодезическими поверхностями для M^{n_1} базисных многообразий, а V^{n_2} и V^{n_3} позиционные поверхности - омбилическими поверхностями для M^{n_2} и M^{n_3} базисных многообразий.

Ключевые слова: позиционная поверхность, полностью геодезическая поверхность, тензор, ортогональная композиция, омбилическая поверхность.

SURFACES: UMBILICAL AND COMPLETELY GEODETIC IN V^n RIEMAN SPACE.

G.A.Nalbandyan

Umbilical and completely geodetic in V^n Rieman space surfaces are investigated. It is established that V^{n_1} positional surfaces are surfaces of completely geodetic for M^{n_1} basic varieties, and V^{n_2} and V^{n_3} positional surfaces are umblilical surfaces for M^{n_2} and M^{n_3} basic varieties.

Keywords: positional surface, completely geodetic, tensor, orthogonal composition, umbilical surface.

ՀՏԴ 514.784

ՍԵՐՊԻՆՍԿՈՒ $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲՆԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Է.Խ. Ասլանյան

(Աբովյանի պետական ճարտարագիտական քոլեջ)

Յուրաքանչյուր k թվի համար, որը 60 -ի վրա բաժանելիս տալիս է 1 -ից տարբեր մնացորդ, ցույց է տրվում $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ հավասարման առնվազն մեկ՝ $(x;y;z)$ բնական թվերից կազմված լուծում:

Առանցքային բառեր. բնական թվեր, Սերպինսկու վարկած, վերևից սահմանափակ, անհայտ:

Վ. Սերպինսկին իր [1] աշխատանքում առաջարկել է վարկած, ըստ որի ցանկացած $k>1$ թվի համար $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ հավասարումն ունի բնական թվերից կազմված $(x;y;z)$ լուծում, և սույն աշխատանքում այն ապացուցվել է բոլոր $1<k\le 1000$ թվերի համար:

Գ. Պալման [2] ցույց է տվել, որ Սերպինսկու վարկածը ճիշտ է բոլոր բնական այն $k>1$ թվերի համար, որոնք չունեն $1260m+1$, $m\in N$ տեսքը, ինչպես նաև բոլոր $k<922322$ թվերի համար:

Այնուհետև մի շարք հեղինակներ [3-6] ցույց են տվել, որ բոլոր այն $k>1$ թվերը, որոնց համար Վ. Սերպինսկու վարկածը կարող է ճիշտ չլինել, վերևից սահմանափակ են, այսինքն՝ վարկածը ճիշտ է համարյա բոլոր թվերի համար:

Սակայն խնդրի վերջնական լուծումը առայժմ անհայտ է:

ԹԵՈՐԵՄ: *Եթե k բնական թիվը 60 -ի վրա բաժանելիս տալիս է 1 -ից տարբեր մնացորդ, ապա $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ հավասարումն ունի բնական $(x;y;z)$ լուծումներ:*

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիտարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը:

1. Դիցուք k բնական թիվը զույգ է, այդ դեպքում $k=2n$, $x=2n$, $y=n$, $z=n$:

Ստուգենք՝ $\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1+2+2}{2n}=\frac{5}{2n}$:

2. Դիցուք $k>1$ բնական թիվը վերջանում է 1 թվանշանով: 1 թվանշանով վերջացող բնական թվերի բազմությունը ներկայացվում է

$$\left\{10n+1:n\in N\right\}=\left\{30n-9:n\in N\right\}\cup\left\{30n+1:n\in N\right\}\cup\left\{30n-19:n\in N\right\}$$

տեսքով:

ա) Դիցուք $k\in\left\{30n-19:n\in N\right\}$-ը: Վերցնենք

$$k=30n-19;\ x=3\left(2n-1\right);\ y=3\left(2n-1\right)\left(30n-19\right);\ z=\left(2n-1\right)\left(30n-19\right):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{3\left(2n-1\right)}+\frac{1}{3\left(2n-1\right)\left(30n-19\right)}+\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(30n-19\right)}=\frac{30n-19+1+3}{3\left(2n-1\right)\left(30n-19\right)}=$$

$$=\frac{15\left(2n-1\right)}{3\left(2n-1\right)\left(30n-19\right)}=\frac{5}{30n-19}:$$

բ) Դիցուք՝ $k\in\left\{30n-9:n\in N\right\}$:

Վերցնենք՝

$$k=30n-9;\ x=6n-1;\ y=3\left(6n-1\right)\left(10n-3\right);\ z=\left(6n-1\right)\left(10n-3\right):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{3\left(6n-1\right)\left(10n-3\right)}+\frac{1}{\left(6n-1\right)\left(10n-3\right)}=\frac{30n-5}{3\left(6n-1\right)\left(10n-3\right)}=\frac{5}{30n-9}:$$

գ) Դիցուք՝ $k\in\left\{30n+1:n\in N\right\}$ բազմությանը, որը ներկայացվում է

$$\left\{30n+1:n\in N\right\}=\left\{60n-29:n\in N\right\}\cup\left\{60n+1:n\in N\right\}$$

տեսքով:

Երբ $k\in\left\{60n-29:n\in N\right\}$: Վերցնենք՝

$$k=60n-29;\ x=60n-29;\ y=15n-7;\ z=\left(60n-29\right)\left(15n-7\right):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{60n-29}+\frac{1}{15n-7}+\frac{1}{\left(60n-29\right)\left(15n-7\right)}=$$

$$=\frac{15n-7+60n-29+1}{\left(60n-29\right)\left(15n-7\right)}=\frac{75n-35}{\left(60n-29\right)\left(15n-7\right)}=\frac{5}{60n-29}:$$

3. Դիցուք k-ն վերջանում է 3 թվանշանով: Վերցնենք՝

$$k=10n-7;\ x=2n-1;\ y=\left(2n-1\right)\left(10n-7\right);\ z=\left(2n-1\right)\left(10n-7\right):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(10n-7\right)}+\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(10n-7\right)}=$$

$$=\frac{10-7+1+1}{\left(2n-1\right)\left(10n-7\right)}=\frac{10n-5}{\left(2n-1\right)\left(10n-7\right)}=\frac{5\left(2n-1\right)}{\left(2n-1\right)\left(10n-7\right)}=\frac{5}{10n-7}:$$

4. Դիցուք բնական $(k>1)$ թիվը վերջանում է 5 թվանշանով:

Վերցնենք՝

$$k=5(2n-1);\ x=2(2n-1);\ y=3(2n-1);\ z=6(2n-1):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{3(2n-1)}+\frac{1}{6(2n-1)}=\frac{3+2+1}{6(2n-1)}=\frac{6}{6(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}=\frac{5}{5(2n-1)}:$$

5. Դիցուք բնական $(k>1)$ թիվը վերջանում է 7 թվանշանով: Վերցնենք՝

$$k=10n-3;\ x=2n;\ y=2n(10n-3);\ z=n(10n-3):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(10n-3)}+\frac{1}{n(10n-3)}=\frac{10n-3+1+2}{2n(10n-3)}=\frac{10n}{2n(10n-3)}=\frac{5}{10n-3}:$$

6. Դիցուք բնական $(k>1)$ թիվը վերջանում է 9 թվանշանով: Վերցնենք՝

$$k=10n-1;\ x=4n;\ y=4n;\ z=2n(10n-1):$$

Կունենանք՝

$$\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n(10n-1)}+\frac{10n-1+10n-1+2}{4n(10n-1)}=\frac{20n}{4n(10n-1)}=\frac{5}{10n-1}:$$

Այսպիսով, ցույց տվեցինք, որ $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ հավասարումն ունի բնական լուծումներ, երբ $k\notin\{60n+1:n\in N\}$ բազմությանը:

Թեորեմն ապացուցված է:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Sirpinski W. *Sur ies decompositions de nombres rotionnels en fractions* // Mathesis.- 1956.- 65.- P.16-13.
2. Palam'a G. Sudi and congettura di Sierpi'nski relative alla possibilit'ain numeri naturali della $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ // Boll. Un. Mat. Ital.-1958.-3.- P. 65-72.
3. Vaughan R.C. *On a problem of Erdos, Straus and Schinzel* // Mathematika.- 1970.- 17.- P. 193-198.
4. Viola C. *On the Diophantine equations* $\prod_0^k x_i-\sum_0^k x_i=n$, *and* $\sum_0^k\frac{1}{x_i}=\frac{a}{n}$ // *Acta Arith.*- 1972/73.- 22.- P. 339-352.

5. Zun Shen. *On the Diophantine equations* $\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{x_i}=\frac{a}{n}$ // Chinese Ann. Math. Ser B 7.- 1986.- No 2.- P. 213-220.
6. Eisholtz C. *Sums of* k *unit Fractions*.- Trans. Amer. Soc.-2001.- 353.

Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 22.12.2012:

О НАТУРАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ

УРАВНЕНИЯ СЕРПИНСКОГО $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Э.А. Асланян

Доказано, что для любого натурального числа $\left(k>1\right)$, которое при делении на 60 дает остаток, отличный от единицы, уравнение $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ имеет натуральные решения $\left(x;y;z\right)$. Для каждого $k>1$ натурального числа даны конкретные решения.

Ключевые слова: натуральные числа, уравнение Серпинского.

ON NATURAL SOLUTIONS OF THE SERPINSKI EQUATION $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

E.Kh. Aslanyan

It is proved that for any natural number $k>1$ the equation $\frac{5}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ has natural solutions $\left(x;y;z\right)$. For each natural $k>1$ certain solutions are given.

Keywords: natural numbers, Serpinski equation.

УДК 517.51

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $L^p{}_{[0,1]^2}$ ДВОЙНЫМИ РЯДАМИ ШАУДЕРА

А.К. Брсоян
(Ереванский государственный университет)

Для любой функции $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}, p < 1$ можно найти двойной ряд по системе Фабера-Шаудера, который сходится к $f(x,y)$ по норме $L^p_{[0,1]^2}$.

Ключевые слова: система Фабера-Шаудера, ранг функции, носитель функции.

Сначала напомним определение системы Фабера-Шаудера (см. [1]). Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$; $k = 0,1,\dots$; $i = 1,2,\dots,2^k$:

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, \text{ если } x = x_n = x_k^{(i)} = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \qquad (1)$$

k называется рангом функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$ $(n \geq 2)$ системы (1) обозначим через $\Delta_n = \Delta_k^{(i)}$, $n = 2^k + i$. Напомним, что система Фабера-Шаудера – базис в пространстве $C_{[0,1]}$, при этом в разложении непрерывной функции $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ коэффициенты $A_n(f)$ (коэффициенты Фурье) определяются следующим образом:

$$A_0(f) = f(0)\,,\ A_1(f) = f(1) - f(0)\,,$$
$$A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right].$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. Для любого $p \in [0,1)$ и для каждой функции $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$, существует двойной ряд по системе Фабера-Шаудера, который сходится к $f(x,y)$ в $L^p_{[0,1]^2}$ как по сферам, так и по прямоугольникам, т.е.

1) $\exists \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \left|\sum_{k^2+n^2=R^2} a_{k.n}\varphi_k(x)\varphi_n(y) - f(x,y)\right|^p dx\,dy = 0$;

2) $\exists \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_0^1 \int_0^1 \left|\sum_{k,n=0}^{N,M} a_{k,n}\,\varphi_k(x)\varphi_n(y) - f(x,y)\right|^p dx\,dy = 0$.

Отметим, что эта теорема является двумерным аналогом одной теоремы Ульянова (см. [2]).

Мы будем пользоваться леммой 1 работы [3].

Лемма 1. *Пусть даны двоичный интервал* $\Delta = \Delta_p^{(i)} = \left(\frac{i-1}{2^p}, \frac{i}{2^p}\right)$ $(i \in [1,2^p])$ *и числа* $\gamma \neq 0$, $N_0 > 1$ $(N \in \mathbb{N})$, $0 < \epsilon < |\Delta|$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$ *с мерой* $|E| > |\Delta| - \epsilon$ *и полином*

$$Q(x)=\sum_{n=N_0}^{\bar{N}} A_n\varphi_n(x)$$

по системе (1) такие, что:

1) $Q(x)=\begin{cases}\gamma, & \text{при } x\in E,\\ 0, & \text{при } x\in[0,1]\backslash\Delta\end{cases}$; $\|Q(x)\|_C=|\gamma|$;

2) $A_n\cdot\gamma\geq 0$ и $|A_n|\leq|\gamma|$, $\forall n\in[N_0,\bar{N}]$.

Из этой леммы вытекает:

Лемма 2. *Пусть даны числа* $\gamma\neq 0$, $N_0>1$, $\varepsilon\in(0,1)$ *и интервал* $\Delta\subset[0,1]$. *Тогда существует полином по системе Шаудера вида* $Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N} a_k\varphi_k(x)$, *который удовлетворяет условиям*

$$\int_0^1\left|Q(x)-\gamma\chi_\Delta(x)\right|^p dx<\varepsilon,$$

$$\max_{N_0\leq m\leq N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m} a_k\varphi_k(x)\right|^p dx\leq 2|\gamma||\Delta|.$$

Применяя лемму 2 и повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве леммы 3 работы [4], получим доказательство леммы 3, которая формулируется следующим образом:

Лемма 3. *Для любых чисел* $p\in[0,1]$, $N_0>1$ *и* $\varepsilon>0$ *и каждой функции* $f(x,y)\in$ $\in L^p_{[0,1]}$ *существует полином по двойной системе Шаудера вида*

$$Q(x,y)=\sum_{k,n=N_0}^{N} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y),$$

который удовлетворяет условиям:

1) $\int_0^1\int_0^1|Q(x,y)-f(x,y)|^p\,dx\,dy<\varepsilon$;

2) $\max_{\substack{N_0\leq k\leq m\\ N_0\leq n\leq m}}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m}\sum_{k=N_0}^{m} a_{k.n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)\right|^p dx\,dy+$

$+\max_{\sqrt{2}N_0\leq R\leq\sqrt{2}N}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{2N_0\leq k^2+n^2\leq R^2} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)\right|^p dx\,dy\leq 2\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|^p\,dx\,dy.$

Доказательство теоремы 1. Пусть $p\in(0,1)$ и $f(x,y)\in L^p{}_{[0,1]^2}$. Последовательно применяя лемму 1, можем найти полиномы вида

$$Q_k(x,y)=\sum_{S,m=N_{k-1}}^{N_{k-1}} a_{S,m}^{(k)}\varphi_S(x)\varphi_m(y),$$

которые удовлетворяют условиям

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} Q_k(x,y)-f(x,y)\right|^p dx\,dy<2^{-n},$$

$$\max_{N_{k-1}\leq N,M}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{S,m=N_{k-1}}^{N,M} a_{S,m}^{(k)}\varphi_S(x)\varphi_m(y)\right|^p dx\,dy+\max_{\sqrt{2}N_{k-1}<R\leq\sqrt{2}N_k}\int_0^1\int_0^1\sum a_{S,m}^{(k)}\,\varphi_k(x)\varphi_m(y)+$$

$$+\left|\max_{\sqrt{2}N_{k-1}<R\leq\sqrt{2}N_k}\int_0^1\int_0^1\sum_{2N_{k-1}\leq S^2+m^2\leq R^2} a_{S,m}^{(k)}\,\varphi_k(x)\varphi_m(y)\right|^p dx\,dy<2^{-n}.$$

Нетрудно увидеть, что ряд

$$\sum_{S,m=1}^{\infty} a_{S,m}^{(k)}\varphi_S(x)\varphi_m(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{S,m=N_{k-1}}^{N_{k-1}} a_{S,m}^{(k)}\varphi_S(x)\varphi_m(y)\right),$$

где

$$a_{S,m} = \begin{cases} a_{S,m}^{(k)}\ , \text{ при } S,m \in [N_{k-1}, N_k), \quad k = 1,2\dots, \\ \quad\quad 0 \text{ - в остальных случаях} \end{cases}$$

сходится к $f(x,y)$ в метрике $L^p{}_{[0,1]^2}$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schauder J. *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktional raumen* // Math. Zet.-1927.- 26:1.- P. 47–65.
2. Ульянов П.Л. *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* // УМН.- 1972.- 27:2.- С.47-65.
3. Grigoryan M.G., Sargsyan A.A. *Unconditional C-strong property of Faber–Schauder system* // Journal of Mathematical Analysis and Applications.-2009.-352.-P.718-723.
4. Григорян М.Г. *О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье* // Мат. сб. – 1990.- 181:8., С. 1011-1030.

Материал поступил в редакцию 15.02.2013.

$L^p{}_{[0,1]^2}$ ԴԱՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՈՒԴԵՐԻ ԿՐԿՆԱԿԻ ՇԱՐՔԵՐՈՎ

Ա.Կ. Բրսոյան

$f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$, $p < 1$ դասի ցանկացած ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել Շաուդերի համակարգով կրկնակի շարք, որը զուգամիտում է $f(x,y)$-ին $L^p_{[0,1]^2}$ նորմով:

Առանցքային բառեր. Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգ, ֆունկցիայի ռանգ, ֆունկցիայի կրիչ:

ON THE REPRESENTATION FUNCTIONS OF $L^p{}_{[0,1]^2}$ CLASS BY SHAUDER SYSTEM

A.K. Brsoyan

For each function $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$, $p < 1$ one can fined a double series with respect by Shauder system which converges to $f(x,y)$ in $L^p_{[0,1]^2}$ norm.

Keywords: Faber-Shauder system, rank of function, support of function.

УДК 517.98

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ ДИРИХЛЕ

Г.А. Саргсян

(Государственный инженерный университет Армении (Политехник))

E-mail: sargsyan59@mail.ru

Получены результаты о характере множества собственных значений задачи Дирихле для одного дифференциального операторного пучка четвертого порядка, содержащего спектральный параметр. В конце работы для задачи Дирихле строится решение в явном виде, когда область представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

Ключевые слова: спектральный параметр, собственные значения, спектр пучка, операторный пучок, собственные функции.

Краевые задачи на собственные значения дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр, возникают в ряде конкретных задач математической физики.

Дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие спектральный параметр λ, были рассмотрены в многочисленных работах [1-6]. Задача Дирихле для одного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка, содержащая спектральный параметр λ в уравнении, впервые рассмотрена в работе [7].

В этой работе, в частности, установлено существование полной совокупности полиномиальных собственных функций оператора $\Delta^{-2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}$ в $W_2^4(\Omega)$ в случае круговых областей, где Δ^{-2}- оператор, обратный двумерному бигармоническому оператору Δ^2, при нулевых краевых условиях на границе.

Пусть Ω- ограниченная область плоскости с гладкой границей $\partial\Omega.$ В области Ω рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения: найти такие значения параметра $\lambda,$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$L(u)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2\lambda\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0, \tag{1}$$

удовлетворяющие граничному условию

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}-$ производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega.$

Число λ_0 называется собственным значением пучка $L(\lambda)$, если уравнение $L(\lambda_0)u_0 = 0$ имеет нетривиальное решение. Вектор $u_0 \neq 0$, удовлетворяющий уравнению (1), называется собственным вектором пучка $L(\lambda)$, соответствующим собственному значению λ_0. Совокупность всех собственных значений уравнения (1) называется собственным спектром. Получим результат на несамосопряженных спектральных краевых задачах, содержащих параметр λ в уравнении, и приведем ряд утверждений относительно свойств уравнения (1).

Пусть имеем условия

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Известно, что условия (2),(3) эквивалентны $[7]$. Сформулируем некоторые вспомогательные результаты, которые будут полезны для получения ряда важных утверждений относительно характера множества собственных значений задачи (1), (2). В дальнейшем существенную роль будет играть следующий интеграл:

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy. \tag{4}$$

Легко проверить следующее равенство:

$$2\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{5}$$

Далее, применяя формулу Грина, получаем равенство

$$2\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy = \\ = \iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial u\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}dxdy = \\ = \left\{\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right\}. \tag{6}$$

Таким образом, этот интеграл можно преобразовать в интеграл, взятый по контуру области Ω. Учитывая равенство (6) и условия (3), имеем следующее утверждение: если вещественная функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (3), то

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy = 0. \tag{7}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского, имеем следующее неравенство:

$$\left(\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy\right)^2 \le \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy \cdot \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy. \tag{8}$$

Используя равенство (7) и неравенство Коши-Буняковского (8), имеем следующее основное неравенство:

$$\left(\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy\right)^2 \le \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy \cdot \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy. \tag{9}$$

Рассмотрим следующее скалярное произведение $\left(Lu,u\right)$. Исследование этого скалярного произведения приводит к удобной формулировке краевых условий. Известно [7], что если функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (3), то

$$\left(\Delta^2 u, u\right) = \iint_\Omega \left(\Delta u\right)^2 dxdy. \tag{10}$$

Умножив равенство (7) на 2 и прибавив к (10), получаем

$$\left(\Delta^2 u, u\right) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] dxdy, \tag{11}$$

где Δ^2 $-$ бигармонический оператор. Легко проверить, что

$$Lu\left(x,y\right) = \Delta^2 u\left(x, i\sqrt{\lambda} y\right). \tag{12}$$

В силу (11) и равенства (12), умножая скалярно уравнение (1), получим относительно λ следующее квадратное уравнение:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy - 2\lambda \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy + \lambda^2 \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy = 0. \tag{13}$$

Обозначим через D дискриминант уравнения (13) относительно λ. Имеем

$$\frac{D}{4} = \left(\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy\right)^2 - \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy \cdot \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy. \tag{14}$$

В силу неравенства (9), $D \le 0$.

Решая уравнение (13) относительно λ, получаем $\lambda = \mu_1 \pm i\mu_2$, где

$$\mu_1 = \frac{\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy}{\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy}, \; \mu_2 = \frac{\sqrt{-\frac{D}{4}}}{\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy}. \tag{15}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda = \mu_1 > 0$ и $D \le 0,$ отсюда следует, что число λ расположено в правой полуплоскости. Из формул (14), (15) при $D = 0$ следует, что

$$\lambda = \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy} = \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy} > 0. \qquad (16)$$

При $D \le 0,$ в силу неравенства (9), имеем

$$\frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy} \le \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}. \qquad (17)$$

Отсюда из формулы (15) следует, что

$$\left|\lambda\right|^2 = \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy} = \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy}\cdot\frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}. \qquad (18)$$

Применяя неравенство (17) и равенство (18), имеем

$$\frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dxdy} \le \left|\lambda\right| \le \frac{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy}. \qquad (19)$$

Таким образом, можно сделать вывод: спектр пучка $L\left(\lambda\right)$ расположен в правой полуплоскости, и все собственные значения уравнения (1), удовлетворяющие граничному условию (3), удовлетворяют неравенству (19).

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \qquad (20)$$

Ищем решения этого уравнения, удовлетворяющие граничному условию (3).

Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - производные функции из класса $C^2(\overline{\Omega}),$ где $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$ Легко проверить следующие тождества:

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) \text{ для всех } u,v\in C^2(\overline{\Omega}). \tag{21}$$

Интегрируя тождество (21) по области $\Omega,$ получим формулу Грина для волнового оператора:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)dxdy = \\ =\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}dy+u\frac{\partial v}{\partial x}dx \quad \text{для всех } u,v\in C^2(\overline{\Omega}). \tag{22}$$

Лемма. *Краевая задача (20), (3) Дирихле имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ является решением однородной краевой задачи (20), (3). Подставляя в формулу Грина (22) вместо $v(x,y)$ выражение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\in C^2(\Omega),$$

получим

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy=\iint\limits_{\Omega} u\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}dxdy+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy+\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dy\,. \tag{23}$$

Так как $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (20) и в качестве краевых условий (3) из (23) имеем $\iint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy=0,$ то получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0. \tag{24}$$

Известно, что общее решение уравнения (24) имеет вид

$$u(x,y)=f(x)+g(y). \tag{25}$$

Из условия $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega}=0,$ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}=0$ следует, что $f'(x)=0,$ $g'(y)=0,$ т.е. $f(x)\equiv c_1,$ $g(y)\equiv c_2,$ а из краевого условия Дирихле имеем $c_1=-c_2,$ т.е. $u(x,y)\equiv 0.$ Лемма доказана.

Пусть комплексное число $\lambda=i\mu$ $\left(\mu\neq 0\right)$ является собственным значением задачи (1), (2). После этого задачу (1), (2) можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0,\\ &\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\mu^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0,\end{aligned} \tag{26}$$

удовлетворяющих граничному условию (3). Легко проверить, что в силу вышедоказанной леммы, задача (26),(3) имеет только нулевое решение. Таким образом, в силу доказанной леммы, следует, что число $\lambda = i\mu$ не является собственным значением задачи (1), (2).

Теорема 1. *Вещественное значение* λ *не является собственным значением задачи (1), (2), соответствующей вещественным собственным функциям* $u\left(x,y\right)$.

Доказательство. Пусть вещественные собственные значения λ являются собственным значением задачи (1), (2), соответствующей собственной функции $u\left(x,y\right) \neq 0$.

Из (7) легко видеть, что уравнение (13) можно переписать в виде

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dxdy = 0. \qquad (27)$$

Из (27) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Остальная часть доказательства теоремы аналогична вышеизложенному, и, следовательно, задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Полученное противоречие означает, что пучок $L\left(\lambda\right)$ может иметь лишь невещественные собственные значения. Из полученных результатов о характере множества собственных значений задачи (1) (2) имеем следующее утверждение.

Теорема 2. *Краевые задачи (1), (2) могут иметь лишь невещественные собственные значения, определяемые формулой (15), удовлетворяющие неравенству (19), соответствующие вещественным собственным функциям* $u\left(x,y\right)$.

Из вида краевой задачи (1), (2) легко усматривается следующее свойство множества собственных значений: если комплексное число λ_0 – собственное значение задачи (1), (2) и ему соответствуют собственные функции u_{λ_0}, то $\lambda = \overline{\lambda_0}$ комплексно сопряженное также собственное значение задачи (1), (2), и ему соответствует та же собственная функция u_{λ_0}. Таким образом, множество собственных значений задачи (1), (2) симметрично относительно оси абсцисс.

Проиллюстрируем полученный результат на примерах.

Рассмотрим краевую задачу (1) (2) на собственные значения в единичном круге Ω с центром в начале координат. Задача состоит в том, чтобы найти такие значения параметра $\lambda,$ называемые собственными, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничному условию (2).

Поскольку вещественное значение $\lambda \geq 0$, а также комплексное число $\lambda = i\mu$ не являются собственными значениями задачи (1),(2), соответствующей вещественным собственным функциям $u(x,y)$, следовательно, собственные значения, если такие есть, будут только в виде функции $\lambda = \mu_1 \pm i\mu_2, \left(\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0\right)$, соответствующей собственным функциям $u(x,y)$. Пусть комплексное число $\lambda = \mu_1 + i\mu_2$ является собственным значением задачи (1), (2), соответствующей вещественным собственным функциям $u(x,y)$. Тогда задачу (1), (2) после очевидных преобразований можно переписать в виде системы уравнений

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu_1 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \mu_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{29}$$

удовлетворяющих граничному условию (3).

Из уравнения (28) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(x)y + b(x). \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение (29), получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{a''\left(x\right)y}{\mu_2^2} + \frac{b''\left(x\right)}{\mu_2^2},\ a_1\left(x\right) = \frac{a''\left(x\right)}{\mu_2^2},\ b_1\left(x\right) = \frac{b''\left(x\right)}{\mu_2^2}, \tag{31}$$

удовлетворяющую граничному условию (3).

Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$u\left(x,y\right) = \frac{a_1\left(x\right)y^5}{120} + \frac{b_1\left(x\right)y^4}{24} + c\left(x\right)y^3 + d\left(x\right)y^2 + l\left(x\right)y + h\left(x\right). \tag{32}$$

Обозначим через $\partial\Omega_+$ верхнюю, а через $\partial\Omega$ - нижнюю полуокружности.

Решая систему

$$u\Big|_{\partial\Omega_+} + u\Big|_{\partial\Omega_-} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega_+} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega_-} = 0,$$

получим

$$d\left(x\right) = -\frac{b_1\left(x\right)\left(1-x^2\right)}{12},\ h\left(x\right) = \frac{b_1\left(x\right)\left(1-x^2\right)^2}{24}. \tag{33}$$

Решая систему

$$u\Big|_{\partial\Omega_+} - u\Big|_{\partial\Omega_-} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega_+} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega_-} = 0,$$

получим

$$c(x) = -\frac{a_{\ 1}\left(x\right)\left(1-x^2\right)}{60},\ l(x) = \frac{a_{\ 1}\left(x\right)\left(1-x^2\right)^2}{120}. \tag{34}$$

Подставляя полученные выражения (33), (34) в (32), имеем решение задачи (31), (3), которое имеет вид

$$u(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 \left(c_1\left(x\right)y + c_2\left(x\right)\right), \tag{35}$$

где

$$c_1\left(x\right) = \frac{a_1\left(x\right)}{120},\ c_2\left(x\right) = \frac{b_1\left(x\right)}{24}.$$

С другой стороны, так как $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1),(2), умножая обе части уравнения (1) на $\overline{\lambda}^2$, имеем

$$\left(\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u - \mu_2^{\ 2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{37}$$

Ищем решение (36), (37), удовлетворяющее граничному условию (3).

Из уравнения (37) имеем

$$\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = l_1(y)x + l_2(y). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (36), получим вторую вспомогательную краевую задачу:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = m_1\left(y\right)x + m_2\left(y\right), \tag{39}$$

удовлетворяющую граничному условию (3), где

$$m_1\left(y\right) = -\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_2^2} l_1''\left(y\right), m_2\left(y\right) = -\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_2^2} l_2''\left(y\right).$$

Аналогично, проводя те же рассуждения, что и для задачи (28), (39), легко убедиться, что решение краевой задачи (39) имеет вид

$$u(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 \left(d_1(y)x + d_2(y)\right), \tag{40}$$

где

$$d_1\left(y\right)=-\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{120\mu_2^2}l_1''(y),\ d_2\left(y\right)=-\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{24\mu_2^2}l_2''(y).$$

Из соотношений (35), (40) следует, что имеет место равенство

$$c_1(x)y+c_2(x)=d_1(y)x+d_2(y). \tag{41}$$

Нетрудно доказать, что функции $c_1(x),\,c_2(x),\,d_1(y),\,d_2(y)$, удовлетворяющие равенству (41), линейные. Таким образом, имеем

$$u(x,y)=(x^2+y^2-1)^2\left(\alpha_1xy+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4\right), \tag{42}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ - отличные от нуля постоянные.

Теперь решение задачи (1), (2) будем искать в виде (42). Ясно, что искомая функция (42) удовлетворяет условию (3), осталось потребовать, чтобы она являлась решением уравнения (1). Подставляя (42) в (1) и проводя соответствующие преобразования, получим

$$\alpha_1P_1(\lambda)xy+\alpha_2P_2(\lambda)x+\alpha_3P_3(\lambda)y+\alpha_4P_4(\lambda)=0, \tag{43}$$

где $P_1(\lambda)=120-144\lambda+120\lambda^2$, $P_2(\lambda)=120-48\lambda+24\lambda^2$, $P_3(\lambda)=24-48\lambda+120\lambda^2$, $P_4(\lambda)=24-16\lambda+24\lambda^2$.

Поскольку система функций $1,x,y,xy$ линейно независима, следует, что

$$P_1(\lambda)=0,P_2(\lambda)=0,P_3(\lambda)=0,P_4(\lambda)=0. \tag{44}$$

Легко проверить, что из четырех уравнений, содержащихся в (44), никакие из них не имеют общих корней. С другой стороны, так как система функций $1,x,y,xy$ линейно независима, следовательно, в качестве искомого решения задачи (1), (2) можно взять отдельные элементы системы $1,x,y,xy$, умножая множителем $(x^2+y^2-1)^2$. Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 3. *Краевая задача Дирихле $(1),(2)$ в круге Ω с центром в начале координат имеет полиномиальные собственные функции $u_1(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$, $u_2(x,y)=(x^2+y^2-1)^2x$, $u_3(x,y)=(x^2+y^2-1)^2y$, $u_4(x,y)=(x^2+y^2-1)^2xy$, соответствующие собственным значениям*

$$\lambda_1=\frac{1\pm2\sqrt{2}i}{3},\ \lambda_2=1\pm2i,\ \lambda_3=\frac{1\pm2i}{5},\ \lambda_4=\frac{3\pm4i}{5}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрян Р.А. *Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л.Соболева* // Тр. Моск. мат. о-ва.-1960.-9.- С. 455-505.
2. Зеленяк Т.И. *О смешанной задаче для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени*// ДАН СССР.- 1964.- Т. 158, №6.-С. 1268-1270.

3. Вирабян Г.В. *О $n-$кратной полноте для одного класса полиномиальных операторных пучков*// ДАН АрмССР. -1969.- Т.48.- С. 65-70.
4. Акобян Г.С. *О спектральных свойствах пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций* // ДАН АрмССР.-1980.- Т.LXX, №2.- С.80-84.
5. Саргсян Г.А. *О собственных функциях смешанной задачи для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени* // Доклады НАН Армении.- 2006.- Т.106, №3.- С.211-217.
6. Саргсян Г.А. *О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей* // Докл. НАН Армении.- 2009.- Т.109, №2.- С.126-136.
7. Вирабян Г.В. *О спектре одного оператора и о задаче Дирихле для уравнения* // ДАН СССР.- 1960.- Т. 152, N5.
8. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*.- М., 1957.
9. Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике*.- М.,1985.

Материал поступил в редакцию 25.02.2013.

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻՑ ԾՆՎԱԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՓՆՋԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ.Ա. Սարգսյան

Ստացված են Դիրիխլեի խնդրի սեփական արժեքների բազմությունը բնութագրող արդյունքներ չորրորդ կարգի սպեկտրալ պարամետր պարունակող մի դիֆերենցիալ օպերատորային փնջի համար: Բացահայտ տեսքով կառուցված է նաև Դիրիխլեի խնդրի լուծումը, երբ տիրույթը կոորդինատների սկզբնակետը կենտրոն ունեցող միավոր շրջանն է:

Առանցքային բառեր. սպեկտրալ պարամետր, սեփական արժեքներ, փնջի սպեկտր, սեփական ֆունկցիաներ:

ON EIGENVALUES OF DIFFERENTIAL OPERATOR BUNDLES GENERATED BY DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM

G.A. Sargsyan

The character of the eigenvalues set of the Dirichlet boundary value problem for fourth order differential operator bundle with spectral parameter is investigated. In the case where the domain is the unit disk centered in the origin an explicit solition is given.

Keywords: the spectral parameter, the eigenvalues, spectr boundary, operator bundle, eigenfunction.

УДК 517.51

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО СИСТЕМЕ ВИЛЕНКИНА

С.А. Саргсян
(Ереванский государственный университет)

Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Виленкина ограниченного типа и $\epsilon \in (0,1)$. Тогда существует множество $E \subset [0,1)$, $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L(E)$ можно найти ряд по системе Виленкина, который сходится к $f(x)$ по норме $L(E)$ и ненулевые коэффициенты которого монотонно убывают по абсолютному значению.

Ключевые слова: система Виленкина, алгебраический полином, рациональные коэффициенты.

1°. Введение. Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [1] гл.1, §1.5). Рассмотрим произвольную последовательность натуральных чисел $P \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\}$, где $p_j \geq 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Положим

$$m_k = \prod_{j=1}^{k} p_j \quad (p_j \geq 2). \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \dots p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j m_{j-1} \ \textit{и}\ x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j} (\textit{т.е. верны } P - \textit{ичные разложения}). \tag{2}$$

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}, l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq m_k - 1$ имеют два различных разложения – конечные и бесконечные, и чтобы мы имели только однозначные разложения, договоримся для этих точек взять только конечные разложения, в результате получаются следующие соответствия:

$$n \to \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots\};\ x \to \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}.$$

Мультипликативная система, соответствующая последовательности P, определяется в виде

$$W_0(x) \equiv 1;\ W_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right). \tag{3}$$

Выражение (3) можем записать в следующем форме:

$$W_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=-1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \left(\exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right)\right)^{\alpha_j}.$$

Из (1), (2) и (3) следует, что

$$W_{m_{j-1}}(x) = \exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right),$$

следовательно, для n -й функции получим выражение

$$W_n(x) = \prod_{j=1}^{k} \left(W_{m_{j-1}}(x) \right)^{\alpha_j}.$$

Очевидно, что системы, соответствующие разным последовательностям $\{p_k\}$, отличаются друг от друга (в случае, когда $P \equiv \{2, 2, \dots, 2, \dots\}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша). Теория таких систем была построена Н.Я. Виленкиным в 1946 году (см. [2,3]).

В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\{W_n(x)\}$ называется системой Виленкина ограниченного типа. В противном случае – системой неограниченного типа.

Пусть $f(x)$ - вещественная функция из $L^r[0,1)$, $r \geq 1$. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по системе Виленкина через $c_n(f)$, а частичные суммы - через $S_n(x; f)$, т.е.

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\overline{W}_k(x)dx, \qquad S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) W_k(x),$$

$$\left(\int_0^1 W_n(t)\overline{W}_k(t)dt = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \right).$$

Отметим, что в 1957 году Ватари [4] доказал, что система Виленкина с $\sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в L^r при $r > 1$. Затем в 1976 году Янг Восанг [5] для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в L^r при $r > 1$. Для каждой функции $f \in L[0,1)$ и любых $n \in \mathbb{N}$ и $y \in (0, \infty)$ им получено также неравенство

$$mes\{x: |S_n(x, f)| > y\} \leq \frac{C\|f\|_{L[0,1)}}{y} \text{ где } C - \text{абсолютная постоянная}.$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Виленкина ограниченного типа. Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество E, $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L(E)$ существует ряд по системе Виленкина $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_{n_k}(x)$ с $|a_k| \searrow$, который сходится к функции f по норме $L^1(E)$.*

2°. Основная лемма. Для доказательства теоремы мы будем использовать следующую лемму, которую нетрудно получить из леммы 3, работы [6] (см. также [7,8]).

Лемма 1. *Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Виленкина ограниченного типа. Тогда для всех $\epsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ $(N_0 \gg 1)$ и любой $f(x) \in L[0,1)$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1)$ и полином по системе Виленкина вида*

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{\overline{N}} a_k W_{n_k}(x)$$

такие, что

1. $|E| > 1 - \epsilon$;
2. $0 < |a_k| \leq \delta$, $|a_k| \searrow$;
3. $\int_E |Q(x) - f(x)| dx < \varepsilon$;
4. $\max_{N_0 < M \leq \overline{N}} \int_E |a_k W_{n_k}(x)| dx \leq 2 \int_E |f(x)| dx$.

Доказательство теоремы. Пусть $\epsilon > 0$ -произвольное число и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Последовательным применением леммы 1 мы можем определить последовательности измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов по системе Виленкина вида

$$Q_n(x) = \sum_{k=M_n+1}^{M_{n+1}} a_k W_{n_k}(x) \quad n = 1, 2, \dots, M_n \nearrow \quad (M_0 = 1)$$

такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{E_n} |f_n(x) - Q_n(x)| dx < 2^{-4n},$$

$$|E_n| > 1 - \epsilon 2^{-n},$$

$$\max_{M_n < M \le M_{n+1}} \int_{E_n} \left| \sum_{k=M_n}^{M} a_k W_k(x) \right| dx \le 2 \int_{E_n} |f_n(x)| dx ,$$

$$|a_{k+1}| \le |a_k| < \frac{1}{n} \ \textit{при}\ k \in [M_n, M_{n+1}) .$$

Положим, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Очевидно, что $|E| > 1 - \epsilon$. Пусть $f(x) \in L(E)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{Q_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ из $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\int_{E} \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{q} Q_{n_\nu}(x) \right| dx < 2^{-k} \to$$

$$\max_{M_{n_\nu} < M \le M_{n_\nu+1}} \left| \sum_{k=M_{n_\nu}+1}^{M} a_k W_{n_k}(x) \right| dx < 2^{-\nu} \to$$

Очевидно, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} W_{n_{k_j}}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{n_\nu}(x)$$

сходится к $f(x)$ по $L(E)$ норме и $|a_{k_j}| \searrow 0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*.- М.: Наука, 1987.
2. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*.- Баку: Элм, 1981.- 180с.
3. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Изв. АН СССР. Сер. мат.- 1947.-Т. 11.- С.363-400.
4. Watari C. *On generalizes Walsh-Fourier series* // I. PProc. Japan Acad.-1957.- 73.- N 8.- P. 435-438.

5. Young W.-S. *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series* // Trnas. Amer. Math. Soc.- 1976.- 218.- C.311-320.
6. Григорян М.Г., Саркисян С.А. *Нелинейная аппроксимация функций класса L^r по системе Виленкина*// Изв. вузов. Матем.- 2012.- N11.- С.1-10.
7. Grigorian M.G. *On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces*//Studia. Math.- 1999.- 134(3).- P.207-216.
8. Григорян М.Г. *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация* // Матем. сб.- 2012.- 203:3.- С.49-78.

Материал поступил в редакцию 05.02.2013.

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՎԻԼԵՆԿԻՆԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ

Ս.Ա. Սարգսյան

Դիցուք $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$-ն Վիլենկինի համակարգ է՝ սահմանափակ տեսակի, և $\epsilon \in (0,1)$: Այդ դեպքում գոյություն ունի E չափելի բազմություն՝ $E \subset [0,1)$, $|E| > 1-\epsilon$ այնպիսին, որ կամայական $f(x) \in L(E)$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել մոդուլով նվազող գործակիցներով Վիլենկինի շարք, որը զուգամիտում է այդ ֆունկցիային $L(E)$ նորմով:

Առանցքային բառեր. Վիլենկինի համակարգ, հանրահաշվական բազմանդամ, ռացիոնալ գործակիցներ:

ON THE REPRESENTATION FUNCTIONS BY VILENKIN SYSTEM

S.A. Sargsyan

Let $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ be the Vilenkin system of bounded type, and let $\epsilon \in (0,1)$. Then exists a measurable set $E \subset [0,1)$, $|E| > 1-\epsilon$ such that for any function $f(x) \in L(E)$ one can fined a series with respect by Vilenkin system which converges to f(x) in $L(E)$ norm, and the absolute values of non-zero coefficients of that series are monotonically decreasing.

Keywords: Vilenkin system, algebraic polynomial, rational coefficients.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

★ ★ ★

«Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական ժողովածուն լուսաբանում է բարձրագույն և հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը: Ժողովածուում տպագրվում են հանրապետության բուհերի, հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների, մասնագետների՝ այդ ուղղությամբ կատարած հետազոտությունները, մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում ստացված ժամանակակից արդյունքները: Ժողովածուն նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, հայցորդների, ուսուցիչների, դասախոսների համար:

Հոդվածները կարող են ներկայացվել հայերեն, ռուսերեն, անգլերեն լեզուներով:

★ ★ ★

Научно-методический сборник «Математика в высшей школе» освещает актуальные вопросы преподавания математики в общеобразовательной и высшей школе. В сборнике печатаются современные результаты, полученные в разных областях математики, а также исследования в этом направлении, сделанные специалистами, преподавателями вузов республики, учителями общеобразовательных школ. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, соискателей, учителей, преподавателей вузов.

Статьи могут быть представлены на армянском, русском, английском языках.

★ ★ ★

Guidance collection «Mathematics in high school» covers modern basic questions of teaching mathematics in general educational and high school. Results received nowadays in different fields of mathematics as well as researches in this direction made by specialists, lecturers of Higher Educational Institutions of the republic and teachers of general educational schools are published here. The collection is designed for students, post-graduate students, competitors, teachers, lecturers.

Articles can be submitted in Armenian, Russian, English.

ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ՊԱՀԱՆՋՆԵՐԸ

Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Տեքստի տառատեսակը` Sylfaen, տառաչափը` 10pt, տողերի հեռավորությունը` 1 տող, էջի ֆորմատը` A4 (210×297մմ), լուսանցքները. վերնից` 5սմ, ներքևից` 5,1սմ, ձախից` 5,75սմ, աջից` 1,75սմ:

Հոդվածի վերնագիրը տրվում է գլխատառերով, մեջտեղում, **bold**, 12pt տառաչափով, իսկ հեղինակի(ների) Ա. Հ. Ազգանունը(ները)` փոքրատառերով, միայն սկզբնատառերը՝ մեծատառ, ***bold Italic***, 10pt տառաչափով:

Համառոտագրերը տրվում են երեք լեզուներով, 9pt տառաչափով, 5-6 առանցքային բառերով:

Բոլոր բանաձևերը և մաթեմատիկական արտահայտությունները տրվում են Microsoft Equation, *Italic*, 10pt տառաչափով: Հիմնական բանաձևերը ներկայացվում են առանձին տողով, մեջտեղում և համարակալվում են նույն էջի անկյունում` փակագծերի մեջ:

Օգտագործված գրականությունը համարակալվում է ըստ հղումների հերթականության` [1],[2],… տեսքով: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը չպետք է գերազանցի 10 էջը: Տեքստի վերջում տրվում են հոդվածի ներկայացման ամսաթիվը և տարեթիվը:

Հոդվածը գրախոսվում է:

Վերոհիշյալ պահանջները բավարարող հոդվածը (2 օրինակ) և հոդվածի ֆայլը` գրված Microsoft Office Word (*.doc) ֆորմատով, ներկայացվում է ժողովածուի պատասխանատու քարտուղարին: Խմբագրական խորհուրդն իրավունք ունի վերջնական խմբագրման ենթարկել հոդվածները: Խորհրդի կողմից հրատարակման չերաշխավորվելու դեպքում հոդվածը չի վերադարձվում:

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи представляются на армянском, русском или английском языках. Объем статьи не должен превышать 10 печатных страниц. Шрифт – Sylfaen, размер шрифта – 10pt, межстрочный интервал – 1. Формат страницы – A4 (210×297мм). Поля: сверху – 5см, снизу – 5.1 см, слева – 5.75см, справа – 1.75см. Название статьи набирается заглавными буквами, выравнивание по центру, шрифт: **bold**, размер шрифта – 12pt. И.О.Фамилия автора(ов) набирается строчными буквами, шрифт: ***bold italic***, размер шрифта – 10pt. Аннотация представляется на трех языках, размер шрифта – 9pt. 5–6 ключевых слов также на трех языках. Все формулы и математические выражения набираются редактором Microsoft Equation, *italic*, размер шрифта – 10pt. Формулы набираются с новой строки в центре, номер формулы ставится в конце строки, в скобках. Цитированная литература нумеруется по порядку ссылки в статье, в квадратных скобках ([1],[2],...). В конце статьи пишется дата (число/месяц/год) представления статьи. Статья в двух экземплярах и файл статьи в формате Microsoft Office Word (*.doc) представляется ответственному секретарю. **Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.** Представленные статьи рецензируются. Отклоненные редакционным советом статьи не возвращаются. Редакционный совет оставляет за собой право окончательного редактирования статьи.

ARTICLE DESIGNING GUIDELINES

Articles may be presented in the Armenian, Russian or English languages. The whole size of an article should not exceed 10 printed pages. Font – Sylfaen, font size – 10pt, line spacing – 1. Paper size – A4 (210×297mm), margins: top – 5sm, bottom- 5.1sm, left – 5.75sm, right – 1.75sm. The name of article is typed in block letters, alignment on the center, font style – **bold**, the size – 12pt. Initials of the author(s) are typed by lower case letters, font style – ***bold italic***, the size – 10pt. The abstracts are presented on three languages, with 5-6 keywords, font size 9pt. All formulas and mathematical expressions should be typed by Microsoft Equation editor, font style – *italic*, the size – 10pt. Basic formulas are typed since a new line in the center. The number of the formula is put in the end of a line, in brackets. The references are numerated in square brackets ([1],[2],...) in order of occurrence in the article. In the end of article the date (number/month/year) of submission of the article should be written. Articles, printed in 2 copies with the file written in Microsoft Office Word (*.doc) format, should be submitted to the responsible secretary. **Articles issued without observance of these rules, return without consideration**. Presented articles are reviewed. Articles rejected by the editorial board do not return. The editorial board reserves the right to the final edition of the article.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ԳԻՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՀԱՏՈՐ 9 № 1

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ И МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ

ТОМ 9 № 1

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

COLLECTION OF SCIENTIFIC AND METHODICAL ARTICLES

VOLUME 9 № 1

Խմբագիրներ՝
Ժ.Ս. Սեյրանյան
Հ. Ց. Պետրոսյան

Տեխնիկական խմբագիր
Ա.Ս. Տոնոյան

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.12.2012թ.:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Ֆորմատ՝ (70×100) 1/16:
Շարվածքը՝ համակարգչային:
Տառատեսակը՝ Sylfaen: 3.75 տպ. մամ.:
Պատվեր՝349 , Տպաքանակ՝ 110

Հայաստանի Պետական
Ճարտարագիտական
Համալսարանի տպարան
Երևան, Տերյան 105,
Հեռ.՝520 356

Типография Государственного
Инженерного Университета
Армении
Ереван, ул. Теряна 105,
Тел.: 520 356

Printing house of State
Engineering University
of Armenia
105 Teryan str. Yrevan,
Tel. 520 356