ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

**ՀԱՏՈՐ 9 № 3**

«ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ»
ԵՐԵՎԱՆ **2013**

Ընդգրկված է Հայաստանի Հանրապետության Բարձրագույն որակավորման հանձնաժողովի (ՀՀ ԲՈՀ) կողմից ընդունված թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունների արդյունքների տպագրման համար ընդունելի պարբերականների ցանկում՝ «Մաթեմատիկա» և «Մանկավարժություն» մասնագիտությունների համար 23.03.2007:

ՀՏԴ 51
ԳՄԴ 22.1

Մ 151 **Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում:** - Եր.: ՀՊՃՀ «Ճարտարագետ» հրատ., 2013.- Հատոր 9, № 3.- 60 էջ:



**Խմբագրության հասցեն՝** 0009, Երևան, Տերյան 105, ՀՊՃՀ, մասնաշենք 12, սենյակ 12202

**Հեռ.:** +(37410) 56-28-82

**E-mail:** mathdep@seua.am

**Web:** www.math.seua.am

facebook www.facebook.com/pages/Mathematics-in-High-School/339572519477837

ISSN 1829-3344

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**
**РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ**
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(ПОЛИТЕХНИК)

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE**
**OF REPUBLIC OF ARMENIA**
STATE ENGINEERING UNIVERSITY OF ARMENIA
(POLYTECHNIC)

# МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

**ТОМ 9 № 3**

# MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

**VOLUME 9 № 3**

«ЧАРТАРАГЕТ»
ЕРЕВАН 2013

«TCHARTARAGET»
YEREVAN 2013

Включен в список периодических изданий, допустимых для публикования результатов кандидатских и докторских диссертаций по специальностям: “Математика” и “Педагогика”, принятых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Республики Армения (23.03.2007).

УДК 51
ББК 22.1
М 151 **Математика в высшей школе.**– Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2013. - Том 9, №3.– 60с.

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ



**Адрес редакции:** 0009, Ереван, ул. Теряна 105, ГИУА, корпус 12, комната 12202.
**Телефон:** +(37410) 56-28-82. **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

---

It is included in the accepted by the Highest Certifying Commission of Armenia (HCC) list of periodicals admissible for publications of the results of PhD and Doctoral theses by specialties Mathematics and Pedagogy (23.03.2007).
UDC 51
LBC 22.1
M 151 **Mathematics in Higher School.** - Yerevan: SEUA “Tchartaraget” Publishing House.- 2013.- Volume 9, №3.- 60p.

## EDITORIAL COUNCIL



**Address:** 0009, Yerevan, 105 Teryan, SEUA, bld. 12, room 12202.
**Tel:** +(37410) 56-28-82, **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

ISSN 1829-3344

ՀՏԴ 514

# ԱՐԲԵԼՈՍԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄՆԵՐ. ՊԱՐԲԵԼՈՍ ԵՎ $f$ - ԲԵԼՈՍ

***Վ.Ս. Զաքարյան, Ա.Հ. Առաքելյան, Գ.Մ. Ստեփանյան***

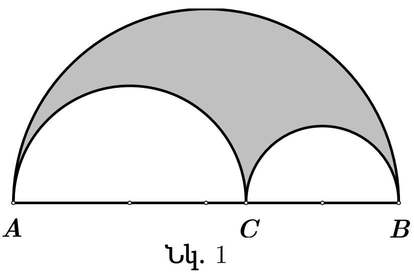
(Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան (Պոլիտեխնիկ))

**E-mail:** armarakelyan@seua.am, gevorg.lunacomp@gmail.com

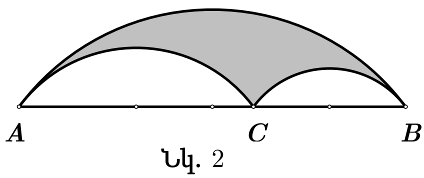
Փորձ է արվում ընդհանրացնելու երեք միմյանց փոխադարձաբար շոշափող կիսաշրջանագծերով սահմանափակված արբելոս երկրաչափական պատկերը և դրա պարաբոլային անալոգ պարբելոսը: Առաջարկվում է արբելոսը սահմանափակող կիսաշրջանագծերը փոխարինել կամայական միմյանց նման $f$ կորերով և ստացված պատկերն անվանել $f$ -բելոս: Ստացված պատկերի համար ապացուցվում են արբելոսին և պարբելոսին բնորոշ անալոգային հատկությունները, իսկ արբելոս և պարբելոս պատկերները սահմանվում են որպես որոշակի պայմանների բավարարող $f$ -բելոսներ:

***Առանցքային բառեր.*** արբելոս, պարբելոս, $f$ -բելոս, շոշափող զուգահեռագիծ, անընդհատ ֆունկցիա:

**1°. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ:** Վերջին տասնամյակներին զգալիորեն մեծացել է երկրաչափների հետաքրքրությունը Արքիմեդի կողմից «արբելոս» անվանված պատկերի նկատմամբ [1-4] (նկ. 1 ): Բացահայտվել են այս պատկերի բազմաթիվ հատկություններ, որոնցից մի քանիսը նկարագրված են [5,6] աշխատանքներում: Ուշագրավ է, որ բավականին երկար ժամանակ (մոտ 23 դար) չի կատարվել այս պատկերի ընդհանրացում, և միայն [7] աշխատանքում առաջարկվել է արբելոսը սահմանափակող կիսաշրջանագծերը փոխարինել պարաբոլներով (նկ. 2 ):




**Նկ.** 1




**Նկ.** 2

Վերը նկարագրված պատկերն ավելի խիստ կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ:

**ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1:** Դիցուք $A$ -ն, $B$ -ն և $C$ -ն տրված 3 կետեր են: Կառուցենք այս կետերով անցնող, ճյուղերի միևնույն ուղղությունն ունեցող 3 պարաբոլներ այնպես, որ դրանց ֆոկուսները գտնվեն $AB$ ուղղի վրա: Ստացված պարաբոլներով սահմանափակված պատկերն անվանենք *պարբելոս,* իսկ $A, B$ և $C$ կետերը պարբելոսի գագաթներ [7]:

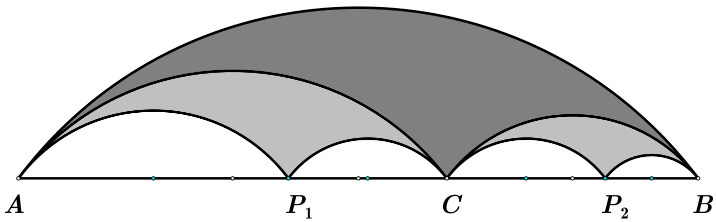
Ի տարբերություն արբելոսի, պարբելոսը սահմանափակող ստորին պարաբոլները միմյանց չեն շոշափում, բայց շոշափում են վերինին: Սակայն այս երկու պատկերներն ունեն մի շարք համանման հատկություններ: Բերենք դրանցից մի քանիսը, որոնք ապացուցված են [7]-ում:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 1: Պարբելոսի վերին և ստորին եզրագծերն ունեն հավասար երկարություններ՝

$$l_{AB} = l_{AC} + l_{CB} :$$

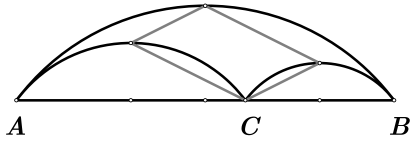
ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2: Պարբելոսի ստորին սեգմենտներում կառուցենք սկզբնականին նման նոր պարբելոսներ: Ստացված ստորին $4$ սեգմենտներից կենտրոնական երկուսը հավասարամեծ են, իսկ նրանց եզրագծերի երկարությունների գումարը հավասար է սկզբնական պարբելոսի ստորին սեգմենտների եզրագծերի երկարությունների միջին հարմոնիկի կեսին (նկ. $3$)

$$l_{P_1C} = \frac{l_{AC}}{l_{AC} + l_{CB}} l_{CB} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{l_{AC}} + \frac{1}{l_{CB}}} = \frac{l_{CB}}{l_{AC} + l_{CB}} l_{AC} = l_{CP_2}$$

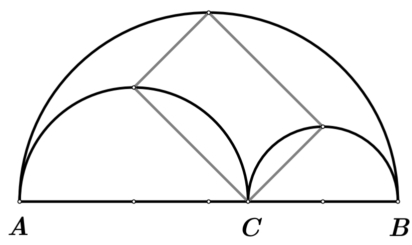



Նկ. $3$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 3: Պարբելոսը կազմող $3$ պարաբոլների գագաթները պարբելոսի կենտրոնական գագաթի հետ միասին կազմում են զուգահեռագիծ, որի մակերեսը պարբելոսի մակերեսի $3/4$ մասն է (նկ. $4$): Նկատենք, որ արբելոսի դեպքում նման կերպ կառուցված քառանկյունն ուղղանկյուն է, որի մակերեսը $\pi / 2$ անգամ փոքր է արբելոսի մակերեսից (նկ. $5$):

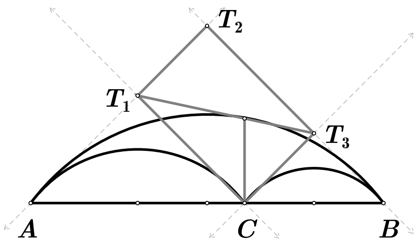



Նկ. $4$

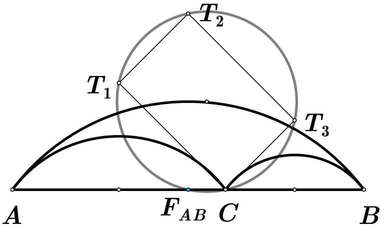



Նկ. $5$

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 4:** Պարբելոսի 3 գագաթներով անցնող 4 շոշափողները կազմում են ուղղանկյուն, որի մակերեսը պարբելոսի մակերեսի $3/2$ մասն է (նկ. 6): $CT_1T_2T_3$ ուղղանկյունն անվանենք *շոշափող ուղղանկյուն*:




**Նկ.** 6



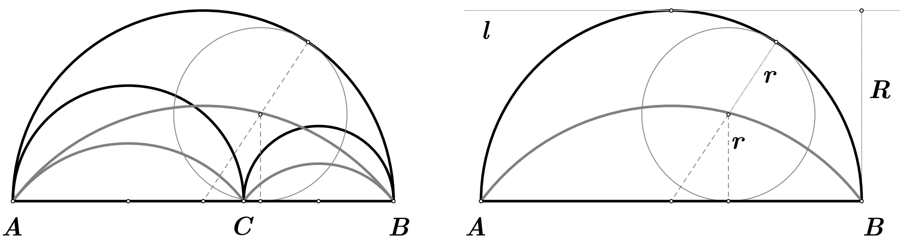

**Նկ.** 7

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 5:** Պարբելոսը շոշափող $CT_1T_2T_3$ ուղղանկյան $T_1T_3$ անկյունագիծը շոշափում է պարբելոսի վերին պարաբոլը (նկ. 6):

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 6:** Պարբելոսը շոշափող $CT_1T_2T_3$ ուղղանկյանն արտագծված շրջանագիծն անցնում է պարբելոսի վերին պարաբոլի ֆոկուսով (նկ. 7):

Հաջորդ հատկությունը հետաքրքիր երկրաչափական կապ է հաստատում արբելոս և պարբելոս պատկերների միջև:

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 7:** Արբելոսի կիսաշրջանագծերին ներգծված շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը պարբելոս է (նկ. 8):



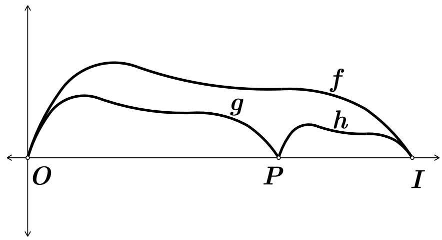

**Նկ.** 8

**2°. *f* - ԲԵԼՈՍ:** Արբելոսում կիսաշրջանագծերը պարաբոլներով փոխարինելու գաղափարն առաջացել է այդ երկու պատկերների համար գործող նմանության հատկությունից: Այդ հատկության շնորհիվ հնարավոր է կառուցել պատկեր, որը կընդհանրացնի արբելոսը և պարբելոսը:

Վերցնենք ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգ և դիտարկենք $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ոչ բացասական ֆունկցիան, որն ընդունում է $0$ արժեք միայն $x=0$ և $x=1$ կետերում: Ենթադրենք՝ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0,1]$ հատվածում և դիֆերենցելի է $(0,1)$ միջակայքում: Վերցնենք կամայական $P(p,0)$, $p\in(0,1)$ կետ, և սահմանենք $g:[0,p]\to\mathbb{R}$ և $h:[p,1]\to\mathbb{R}$ ֆունկցիաները հետևյալ կերպ՝

$$g(x) = pf\left(\frac{x}{p}\right), \quad h(x) = (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right):$$

Սահմանումից բխում է, որ $g$ և $h$ ֆունկցիաները նման են $f$-ին: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ կամայական $x \in (0,1)$ կետի համար $g$ և $h$ ֆունկցիաները փոքր են $f$-ից (նկ. 9 ):




**Նկ.** 9

$f$, $g$ և $h$ ֆունկցիաներով սահմանափակված պատկերն անվանենք $f$ - *բելու*, իսկ $O(1,0)$, $\mathrm{I}(1,0)$ և $P(p,0)$ կետերը՝ $f$ - բելոսի գագաթներ:

**Դիտողություն 1:** Եթե $f$ - բելոսում որպես սկզբնական $f$ ֆունկցիա վերցնենք $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, ապա կստանանք արբելոս պատկերը, իսկ $f(x)=x-x^2$ դեպքում՝ պարբելոս պատկերը:

Դիտարկենք $f$ - բելոսի որոշ հատկություններ, որոնք ընդհանրացնում են արբելոսի և պարբելոսի վերը ներկայացված հատկությունները:

**Հատկություն 8:** $f$ - բելոսի վերին և ստորին եզրագծերն ունեն հավասար երկարություններ՝

$$l_{OI} = l_{OP} + l_{PI}:$$

Ապացույց: Հատկությունն ակնհայտորեն հետևում է $g$, $h$ և $f$ ֆունկցիաների նմանությունից՝

$$l_g = l_{OP} = pl_f = pl_{OI},$$

$$l_h = l_{PI} = (1-p)l_f = (1-p)l_{OI}:$$

**Լեմմ:** Դիցուք կամայական $AB$ հատվածի վրա տրված է $C$ կետ այնպես, որ այն չի համընկնում $A$-ի կամ $B$-ի հետ: Տեղադրենք $D \in |AC|$ և $E \in |CB|$ կետերը այնպես, որ՝

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EB|}:$$

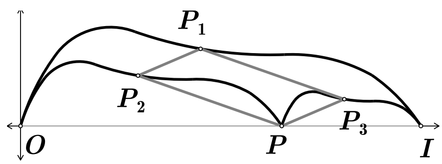
Այդ դեպքում՝

$$|DC| = |CE| = \frac{|AC||CB|}{|AB|}:$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 9: $f$ - բէլոսի ստորին սեգմենտներում կառուցենք սկզբնականին նման նոր $f$ - բէլոսներ: Ստացված 4 ստորին սեգմենտներից կենտրոնական երկուսը հավասարամեծ են, իսկ նրանց եզրագծերի երկարությունների գումարը հավասար է սկզբնական $f$ - բէլոսի ստորին սեգմենտների եզրագծերի երկարությունների միջին հարմոնիկի կեսին:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Ապացույցը անմիջապես բխում է նախորդ լեմմից, հաշվի առնելով, որ աղեղի երկարությունը ուղիղ համեմատական է իր ձգած լարի երկարությանը:

Կամայական $x_0 \in (0,1)$ կետի համար $P_1 = (x_0, f(x_0))$ կետը պատկանում է $f$ -ի գրաֆիկին: Նմանապես, $P_2 = (px_0, pf(x_0))$ և $P_3 = ((1-p)x_0 + p, (1-p)f(x_0))$ կետերը պատկանում են $g$ և $h$ ֆունկցիաների գրաֆիկներին (նկ.10): Նկատենք, որ $\overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{PP_3} = (1-p)(x_0, f(x_0))$, հետևաբար $P_1P_2PP_3$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Քանի որ $P_1P_2PP_3$ զուգահեռագիծը կախված է $x_0$ կետի ընտրությունից, ապա այն կանվանենք $\prod(x_0)$:




Նկ. 10

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 10: $f$ - բէլոսում $\prod(x_0)$ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f^2(x_0) = x_0 - x_0{}^2$: Հետևաբար, $\prod(x_0)$ -ն ուղղանկյուն է այն և միայն այն $x_0$-ների համար, որոնց դեպքում $f$ ֆունկցիայով որոշվում է կիսաշրջանագիծ (նույնն է, թե պատկերն արբելոս է):

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիտարկենք

$$\overrightarrow{P_2P} = (p - px_0, -pf(x_0)) \quad \text{և} \quad \overrightarrow{P_2P_1} = (x_0 - px_0, f(x_0) - pf(x_0))$$

վեկտորները: Այդ դեպքում $\prod(x_0)$ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overrightarrow{P_2P}$ և $\overrightarrow{P_2P_1}$ վեկտորները օրթոգոնալ են, այսինքն՝

$$0 = \overrightarrow{P_2P} \cdot \overrightarrow{P_2P_1} = p(1-p)\left(x_0(1-x_0) - f(x_0)^2\right),$$

ուստի՝ $f(x_0)^2 = x_0 - x_0{}^2$:

Օգտվելով $\overrightarrow{P_2P}$ և $\overrightarrow{P_2P_1}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալից՝ կարելի է հաշվել $\prod(x_0)$ զուգահեռագծի մակերեսը՝

$$S(\prod(x_0)) = \left\| \overrightarrow{P_2P} \times \overrightarrow{P_2P_1} \right\| = p(1-p)f(x_0): \tag{1}$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ **11:** Վերցնենք $c\in(0,1)$ կետն այնպես, որ $f(c)$-ն լինի $f$ ֆունկցիայի միջին արժեքը $[0,1]$ հատվածում: Այդ դեպքում $c$ կետով կառուցված $\Pi(\mathrm{c})$ զուգահեռագիծի մակերեսը 2 անգամ փոքր է $f$ - բելոսի մակերեսից:

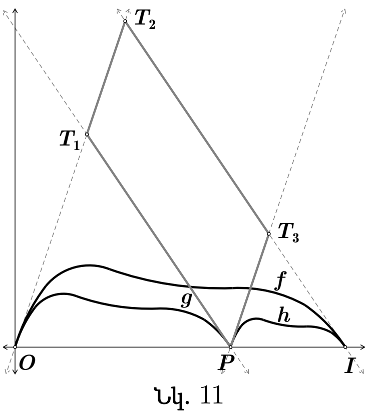
ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Նշանակենք $A$ -ով $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված պատկերի մակերեսը՝ $A=\int_0^1 f(x)\,dx$: Ելնելով նմանությունից՝ $g$ և $h$ ֆունկցիաներով սահամանափակված պատկերների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար կլինեն՝ $p^2A$ և $(1-p)^2A$: Հետևաբար, $f$ - բելոսի մակերեսը կլինի՝

$$A-p^2A-(1-p)^2A=2p(1-p)A:$$

Համաձայն միջին արժեքի թեորեմի՝ $(0,1)$ հատվածում գոյություն ունի այնպիսի $c\in(0,1)$ , որ $A=\int_0^1 f(x)\,dx=f(c)$: Հետևաբար, $f$ - բելոսի մակերեսը կլինի $2p(1-p)f(c)$, որտեղ $f(c)$-ն $f$ ֆունկցիայի միջին արժեքն է $[0,1]$ հատվածում:

**ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ 2:** Դիտարկենք պարբելոսի դեպքը և ապացուցենք հատկություն 3 -ի պնդումը՝ օգտվելով $f$ - բելոսի հատկություններից: Այս դեպքում $f(x)=x-x^2$: $f$ -ի միջին արժեքը $[0,1]$ հատվածում $1/6$ է, հետևաբար, ըստ հատկություն 11 -ի՝ $S(\Pi(\mathrm{c}))=\dfrac{p(p-1)}{6}$: Մյուս կողմից, քանի որ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$, ապա, համաձայն (1)-ի, $S\left(\Pi\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\dfrac{p(p-1)}{4}$: Այստեղից պարբելոսի մակերեսը կլինի՝

$$2S(\Pi(\mathrm{c}))=\frac{p(p-1)}{3}=\frac{4}{3}\frac{p(p-1)}{4}=\frac{4}{3}S\left(\Pi\left(\frac{1}{2}\right)\right):$$



Նկ. 11

$f$ - բելոսի հետագա հատկություններն ուսումնասիրելու համար ենթադրենք, որ $f$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=0$ և $x=1$ կետերում: Կառուցենք $f$ ֆունկցիայի շոշափողները $x=0$ և $x=1$ կետերում, իսկ $g$ և $h$ ֆունկցիաների շոշափողները՝ $x=p$ կետում (նկ. 11):

Նկատենք, որ քառանկյուն $T_1T_2T_3P$ -ի զուգահեռագիծ լինելն անմիջականորեն բխում է $f$ , $g$ և $h$ ֆունկցիաների նմանությունից, $T_1T_2T_3P$ զուգահեռագիծն անվանենք շոշափող զուգահեռագիծ:

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 12:** $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագծի մակերեսը հաշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S\left(T_1T_2T_3P\right) = p(1-p)\left|\frac{f'(0)f'(1)}{f'(0)-f'(1)}\right| :$$

Ապացույց: $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագծի գագաթների կոորդինատները հեշտությամբ ստացվում են հետևյալ հավասարումներից՝

$$\overline{T_1T_2} : y = f'(0)x,$$

$$\overline{PT_3} : y = f'(0)(x-p),$$

$$\overline{T_1P} : y = f'(1)(x-p),$$

$$\overline{T_2T_3} : y = f'(1)(x-1):$$

Օգտվելով $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագծի գագաթների կոորդինատներից՝ կարելի է ստանալ, որ՝

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \frac{(1-p)f'(1)}{f'(1)-f'(0)}\left(1, f'(0)\right) \text{ և } \overrightarrow{T_1P} = \frac{-pf'(0)}{f'(1)-f'(0)}\left(1, f'(1)\right):$$

Այստեղից՝

$$S\left(T_1T_2T_3P\right) = \left|\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1P}\right| = p(1-p)\cdot\left|\frac{f'(0)f'(1)}{\left(f'(1)-f'(0)\right)^2}\right|\cdot\left|f'(1)-f'(0)\right| =$$

$$= p(1-p)\cdot\left|\frac{f'(0)f'(1)}{f'(1)-f'(0)}\right|:$$

**ՀԵՏԵՎԱՆՔ 1:** $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(0)f'(1) = -1$: Այդ դեպքում $T_1T_2T_3P$ շոշափող ուղղանկյան մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S\left(T_1T_2T_3P\right) = p(1-p)\frac{f'(0)}{1+f'(0)^2}:$$

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 13:** Դիցուք $f(c)$-ն տրված $f$-բելոսի վերին եզրագծի միջին արժեքն է $[0,1]$ հատվածում, իսկ $\Pi(c)$-ն՝ $c$ կետով ծնված զուգահեռագիծը: Այդ դեպքում, եթե $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագծը ուղղանկյուն է (նույնն է թե $f'(0)f'(1) = -1$), ապա՝

$$S\left(\Pi(c)\right) \geq 2f(c)S\left(T_1T_2T_3P\right):$$

Ընդ որում, հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(0) = -f'(1) = 1$:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Օգտվելով հատկություն 11-ից, 13-ից և այն փաստից, որ $2f'(0) \le 1 + f'(0)^2$, կստանանք՝

$$S(\Pi(c)) = f(c)\,p(1-p) = f(c)\frac{S(T_1T_2T_3P)}{\dfrac{f'(0)}{1+f'(0)^2}} \ge 2f(c)\,S(T_1T_2T_3P):$$

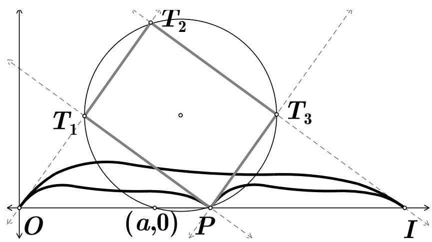
Ընդ որում, հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $2f'(0) = 1 + f'(0)^2$, նույնն է թե $f'(0) = 1$: Մյուս կողմից՝ $f'(0)f'(1) = -1$, հետևաբար՝ $f'(1) = -1$:

**ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ 3:** Եթե վերցնենք պարբելոսի դեպքը, ապա $f(x) = x - x^2$: Այդ դեպքում $f'(0) = -f'(1) = 1$, իսկ $f(c) = 1/6$: Հետևաբար՝

$$S(T_1T_2T_3P) = \frac{S(\Pi(c))}{2f(c)} = 3S(\Pi(c)):$$

Այստեղից, ըստ դիտողություն 3-ի, ստացվում է հատկություն 4-ը:

$f$ - բելոսի հաջորդ հատկություններն ուսումնասիրելու համար ենթադրենք, որ $f'(0)f'(1) = -1$ (նույնն է, թե $T_1T_2T_3P$ շոշափող զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է): Դիտարկենք այդ ուղղանկյանը արտագծած $\Gamma$ շրջանագիծը (նկ. 12):




**Նկ.** 12

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 14:** $\Gamma$ շրջանագիծը հատում է $OX$ առանցքը $(p,0)$ և $\left(\frac{1}{1+f'(0)^2}, 0\right)$ կետերում: Ընդ որում.

- $\Gamma$ շրջանագիծը շոշափում է $OX$ առանցքը այն և միայն այն դեպքում, երբ $p = \frac{1}{1+f'(0)^2}$;

- $\Gamma$ շրջանագիծը հատում է $OX$ առանցքը $x = \frac{1}{2}$ կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(0) = 1$:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Քանի որ $T_1T_2T_3P$-ն ուղղանկյուն է, ապա $\Gamma$ շրջանագծի կենտրոնը $T_1T_3$ հատվածի միջակետն է՝

$$O_\Gamma = \left( \frac{p+1+pf'(0)^2}{2\left(1+f'(0)^2\right)}, \frac{f'(0)}{2\left(1+f'(0)^2\right)} \right):$$

Ակնհայտ է, որ $\Gamma$ շրջանագիծը և $OX$ առանցքն ունեն առնվազն մեկ ընդհանուր կետ՝ $P(p,0)$: Դիցուք $\Gamma$ շրջանագիծը և $OX$ առանցքը հատում է $P$-ից տարբեր $(a,0)$ կետում: Պարզ է, որ՝

$$\left( \frac{p+1+pf'(0)^2}{2\left(1+f'(0)^2\right)} - a \right)^2 + \left( \frac{f'(0)}{2\left(1+f'(0)^2\right)} \right)^2 = \left( \frac{p+1+pf'(0)^2}{2\left(1+f'(0)^2\right)} - p \right)^2 + \left( \frac{f'(0)}{2\left(1+f'(0)^2\right)} \right)^2,$$

$$\left(a^2-p^2\right) - (a-p)\frac{p+1+pf'(0)^2}{2\left(1+f'(0)^2\right)} = 0:$$

Քանի որ $p \neq a$, ապա՝

$$a = \frac{p+1+pf'(0)^2}{2\left(1+f'(0)^2\right)} - p = \frac{1}{1+f'(0)^2}:$$

Կրկին դիտարկենք այն ընդհանուր դեպքը, երբ $T_1T_2T_3P$-ն զուգահեռագիծ է: Այդ դեպքում $T_1T_3$ ուղղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\left[(1-2p)f'(0)f'(1)\right]x + \left[pf'(0)-(1-p)f'(1)\right]y + p^2f'(0)f'(1) = 0:$$

Դիտարկենք այն պայմանները, որոնք անհրաժեշտ են, որ այս ուղիղը շոշափի $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(p,f(p))$ կետում:

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 15:** $(p,f(p))$ կետը պատկանում է $T_1T_3$ ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$f(p) = \frac{p(p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0)-(1-p)f'(1)},$$

իսկ $T_1T_3$ ուղիղը շոշափում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(p,f(p))$ կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$f'(p) = \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0)-(1-p)f'(1)}:$$

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Հատկության առաջին պնդումն ապացուցելու համար բավական է միայն տեղադրել $(p,f(p))$ կետի կոորդինատները $T_1T_3$ ուղղի հավասարման մեջ:

Երկրորդ մասի համար բավական է, որ $T_1T_3$ ուղղի ուղղորդ վեկտորը համուղղված լինի $f'(p)$-ին:

**ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 16:** Կամայական $f$ - բելոսը շոշափող $T_1T_2T_3P$ զուգահեռագծի $T_1T_3$ անկյունագիծը շոշափում է $f$ - բելոսը $(p,f(p))$ կետում ցանկացած $p\in(0,1)$-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ $f$-ը պարաբոլ է՝ $f(x)=k(x-x^2)$: Ընդ որում, $T_1T_2T_3P$-ն ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $k=1$:

Ապացույց: Նախորդ հատկությունից հետևում է, որ՝

$$f(x)=\frac{x(x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0)-(1-x)f'(1)}\text{ , }\forall x\in[0,1]:$$

Մյուս կողմից, համաձայն հատկություն 15-ի երկրորդ մասի՝

$$f'(x)=\frac{f'(0)f'(1)\left[x^2f'(0)+(1-x)^2f'(1)\right]}{\left[xf'(0)-(1-x)f'(1)\right]^2}=\frac{(2x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0)-(1-x)f'(1)}$$

ցանկացած $x\in(0,1)$-ի համար: Ձևափոխելով ստացված արտահայտությունը, կունենանք՝

$$(f'(0)+f'(1))(x-x^2)=0\text{ , }\forall x\in[0,1]:$$

Հետևաբար՝ $f'(0)=-f'(1)$, որը, տեղադրելով հատկություն 15-ի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$f(x)=\frac{-x(x-1)f'(0)^2}{xf'(0)+(1-x)f'(0)}=f'(0)(x-x^2):$$

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


1. Power F. *Some more Archimedean circles in the arbelos* // Forum Geom.- 2005.-No.5.- P.133–134.
2. Woo P.Y. *Simple constructions of the incircle of an arbelos* // *Forum Geom.*- 2001.-No.1.- P.133–136.
3. Bankoff L. *The marvelous arbelos* // The lighter Side of Mathematics, ed. R.K. Guy and R.E. Woodrow, Mathematical Association of America.- 1994.-P.247–253,.
4. Архимед *Сочинения*. - М.: Гос.изд. физ.-мат. лит., 1962.- 637с.
5. Закарян В.С., Аракелян Г.С. *Некоторые свойства Арбелоса* // Бнагет.- 2003.- №5-6.- С. 61-68.
6. Закарян В.С., Аракелян А.Г. *О последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос* // Потенциал: Математика, Физика, Информатика.- 2011.- №10.- С.29-35.
7. Sondow J. *The parbelos, a parabolic analog of the arbelos* // Amer. Math. Monthly.- 2013.- No.120.- P. 929-935.

**Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 09.10.2013:**

## ОБОБЩЕНИЯ АРБЕЛОСА: ПАРБЕЛОС И $f$ - БЕЛОС

***В.С. Закарян, А.Г. Аракелян, Г.М. Степанян***

Сделана попытка обобщить ограниченную тремя взаимно касающимися полуокружностями фигуру арбелоса и его параболического аналога - парбелоса. Предложено рассмотреть фигуру $f$-белос, ограниченную произвольными подобными кривыми. Для введенной фигуры доказаны аналогичные свойства, существующие для арбелоса и парбелоса. Кроме того, арбелос и парбелос характеризуются как $f$- белосы, удовлетворяющие определенным условиям.

***Ключевые слова***: арбелос, парбелос, $f$- белос, касательный параллелограмм, непрерывная функция.

## ARBELOS GENERALIZATIONS: PARBELOS AND $f$ - BELOS

***V.S. Zakarian, A.H. Arakelyan, G.M. Stepanian***

An attempt to generalize the shape *arbelos* bounded by three mutually tangent semicircles with collinear diameters and its parabolic analog *parbelos* is made. It is suggested to consider the figure bounded by arbitrary similar curves, the *f-belos.* An $f_0^n\left(\sigma\right) = \left(0{,}0\right)$log properties to those of the arbelos and parbelos are proved, moreover, the parbelos and the arbelos are characterized as the f-beloses satisfying certain.

***Keywords:*** arbelos, parbelos, *f*-belos, tangent parallelogram, continuous function.

ՀՏԴ 517.962.2

# ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՄԱՐ

***Ա.Ա. Հունանյան***
(Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիա)
**E-mail**: hunanyan.areg21@gmail.com

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ շարքի համար առաջարկվում է հետևյալ ներկայացումները՝

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{7}\pi^2\ln 2-\frac{8}{7}\int_0^{\pi/2}y^2ctgydy$, բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{9}\pi^2\ln 2-\frac{16}{9\pi}\int_0^{\pi/2}y^3ctgydy$,

որտեղից որպես հետևանք ստացվում է՝ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=4\int_0^{\pi/2}(y^2-\frac{2y^3}{\pi})ctgydy$ ։

***Առանցքային բառեր.*** կոնտուր, Էյլերի I սեռի ինտեգրալ, Ֆուրյեի շարք:

Հայտնի է, որ երբ $p$-ն զույգ թիվ է, ապա տարբեր մեթոդներով, մասնավորապես՝ Ֆուրյեի շարքերի կիրառմամբ, կարելի է հաշվել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ շարքերի գումարները $p>1$ դեպքում և ստանալ վերջնական արդյունք: Օգտագործելով Ֆուրյեի շարքերը՝ կարելի է ստանալ հետևյալ արդյունքները.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450},$$

սակայն այդպիսի արդյունքներ չկան կենտ $p$-երի համար:

Արդեն 100 տարուց ավելի չկա $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ շարքի գումարի արտահայտությունը: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ շարքի գումարի համար կստանանք հետևյալ ներկայացումները.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{7}\pi^2\ln 2-\frac{8}{7}\int_0^{\pi/2}y^2ctgydy, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{9}\pi^2\ln 2-\frac{16}{9\pi}\int_0^{\pi/2}y^3ctgydy: \tag{2}$$

Վերոնշյալ ներկայացումները ստանալու համար օգտվենք հետևյալ բանաձևերից.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=\frac{1}{\Gamma\left(p+1\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^p dx}{e^x-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{2^{p-1}}\frac{1}{\Gamma\left(p+1\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^p dx}{e^x+1}\ ,$$

որտեղ $\Gamma\left(p\right)$-ն Էյլերի I սեռի ինտեգրալն է: Նշենք, որ այս բանաձևերը ստացվել են նախորդ հոդվածում [4]:

Այժմ որոշենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p=2,3,4)$ շարքերի գումարները: Այս գումարները հաշվելու համար օգտվենք հետևյալ կոնտուրային ինտեգրալներից.

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^p dz}{e^z-1}\ (p=2,3,4),$$

որտեղ $\Gamma_R$ -ը ուղղանկյուն է z=0, z=R, z=R+$i\pi$ , z=$i\pi$ գագաթներով:

$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^p dz}{e^z-1}$ $(p=2,3,4)$ ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը՝ $\Gamma_R$ փակ կորով տարածված, հավասար է 0-ի՝ համաձայն Կոշիի ինտեգրալային թեորեմի: Կատարենք ինտեգրում այդ ինտեգրալներից յուրաքանչյուրի համար և անցնենք սահմանի, երբ $R\to+\infty$:

Երբ $p=1$ , ստանում ենք.

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{zdz}{e^z-1}=\int_0^R\frac{xdx}{e^x-1}+\int_0^{\pi}\frac{(R+iy)idy}{e^{R+iy}-1}+\int_R^0\frac{(x+i\pi)dx}{e^{x+i\pi}-1}+\int_{\pi}^0\frac{iyidy}{e^{iy}-1}=0: \tag{3}$$

Այժմ ձևափոխենք այս ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը և հետո անցնենք սահմանի, երբ $R\to+\infty$ .

$$\int_0^R\frac{xdx}{e^x-1}\to\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{, երբ } R\to+\infty:$$

Գնահատենք երկրորդ ինտեգրալը.

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{R+iy}{e^{R+iy}-1}idy\right|\le\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{R^2+\pi^2}}{e^R-1}dy\to 0\text{, երբ } R\to+\infty:$$

Այսինքն՝ $\int_0^{\pi}\frac{R+iy}{e^{R+iy}-1}idy\to 0$ , երբ $R\to+\infty$:

Երրորդ ինտեգրալի համար կարող ենք գրել.

$$\int_R^0\frac{(x+i\pi)dx}{e^{x+i\pi}-1}=\int_0^R\frac{(x+i\pi)dx}{e^x+1}\to\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x+1}+i\pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}\text{, երբ } R\to+\infty:$$

Քանի որ $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ , իսկ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}$=ln2, հետևաբար, ստանում ենք.

$$\int_R^0\frac{(x+i\pi)dx}{e^{x+i\pi}-1}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+i\pi\ln 2\text{, երբ } R\to+\infty:$$

Չորրորդ ինտեգրալի համար կստանանք.

$$\int_{\pi}^{0}\frac{iyidy}{e^{iy}-1}=\int_{0}^{\pi}\frac{ydy}{e^{iy}-1}=\int_{0}^{\pi}\frac{y(e^{-iy}-1)dy}{2-2\cos y}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{y(\cos y-1)}{1-\cos y}dy--\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{y\sin ydy}{1-\cos y}=-\frac{\pi^2}{4}-2i\int_{0}^{\pi/2}yctgydy:$$

Այսպիսով, ստացված նախորդ բոլոր արդյունքները միացնելու դեպքում, (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+i\pi\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}-\frac{\pi^2}{4}-2i\int_{0}^{\pi/2}yctgydy=0:$$

Անջատելով իրական և կեղծ մասերը՝ ստանում ենք.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-\frac{\pi^2}{4}=0\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

որը հայտնի արդյունք է: Եվ ստանում ենք, որ $\int_{0}^{\pi/2}yctgydy=\frac{\pi}{2}\ln 2:$

Այժմ դիտարկենք $p=2$ դեպքը: Այս դեպքում ստանում ենք.

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{e^z-1}=\int_{0}^{R}\frac{x^2dx}{e^x-1}+\int_{0}^{\pi}\frac{(R+iy)^2idy}{e^{R+iy}-1}+\int_{R}^{0}\frac{(x+i\pi)^2dx}{e^{x+i\pi}-1}+\int_{\pi}^{0}\frac{(iy)^2idy}{e^{iy}-1}=0: \qquad (4)$$

Կատարենք ձևափոխություններ ինտեգրալներից յուրաքանչյուրում և անցնենք սահմանի, երբ $R\to+\infty$.

$$\int_{0}^{R}\frac{x^2dx}{e^x-1}\to\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},\ \text{երբ}\ R\to+\infty,$$

$$\left|\int_{0}^{\pi}\frac{(R+iy)^2}{e^{R+iy}-1}idy\right|\le\int_{0}^{\pi}\frac{R^2+\pi^2}{e^R-1}dy\to 0,\ \text{երբ}\ R\to+\infty,$$

$$\int_{R}^{0}\frac{(x+i\pi)^2dx}{e^{x+i\pi}-1}=\int_{0}^{R}\frac{(x^2+2i\pi x-\pi^2)}{e^x+1}dx=\int_{0}^{R}\frac{x^2}{e^x+1}dx+2i\pi\int_{0}^{R}\frac{x}{e^x+1}dx-\pi^2\int_{0}^{R}\frac{dx}{e^x+1}\to$$

$$\to\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{e^x+1}dx+2i\pi\int_{0}^{\infty}\frac{x}{e^x+1}dx-\pi^2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}+2i\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-\pi^2\ln 2:$$

Մյուս կողմից, քանի որ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots-2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\cdots\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots-\frac{2}{8}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

և հաշվի առնելով, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, կստանանք.

$$\int\limits_R^0 \frac{(x+i\pi)^2 dx}{e^{x+i\pi}-1} \to \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} + \frac{i\pi^3}{6} - \pi^2 \ln 2\,,\text{ երբ } R \to +\infty:$$

Այժմ պարզեցնենք $\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(iy)^2 idy}{e^{iy}-1}$ ինտեգրալը:

$$\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(iy)^2 idy}{e^{iy}-1} = i\int\limits_0^{\pi} \frac{y^2(e^{-iy}-1)}{(e^{iy}-1)(e^{-iy}-1)}dy = i\int\limits_0^{\pi} \frac{y^2(\cos y-1)-iy^2\sin y}{2-2\cos y}dy =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_0^{\pi}(-y^2)dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} y^2 ctg\frac{y}{2}dy = -\frac{i\pi^3}{6} + 4\int\limits_0^{\pi/2} y^2 ctgy dy:$$

Երբ $R \to +\infty$, (4) հավասարությունը ստանում է հետևյալ տեսքը.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} + \frac{i\pi^3}{6} - \pi^2\ln 2 - \frac{i\pi^3}{6} + 4\int\limits_0^{\pi/2} y^2 ctgy dy = 0\,,$$

որտեղից $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ շարքի համար ստանում ենք (1)-ում գրված արդյունքը.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{2}{7}\pi^2\ln 2 - \frac{8}{7}\int\limits_0^{\pi/2} y^2 ctgy dy:$$

Այժմ դիտարկենք $p=3$ դեպքը, այսինքն՝ հաշվենք $\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3dz}{e^z-1}$ ինտեգրալը.

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3dz}{e^z-1} = \int\limits_0^R \frac{x^3dx}{e^x-1} + \int\limits_0^{\pi}\frac{(R+iy)^3 idy}{e^{R+iy}-1} + \int\limits_R^0 \frac{(x+i\pi)^3dx}{e^{x+i\pi}-1} + \int\limits_{\pi}^0 \frac{(iy)^3 idy}{e^{iy}-1} = 0: \qquad (5)$$

Ձևափոխենք գրված ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը և անցնենք $R \to +\infty$ սահմանին:

$$\int\limits_0^R \frac{x^3dx}{e^x-1} \to \int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,,\text{ երբ } R\to+\infty\,,$$

$$\left|\int\limits_0^{\pi}\frac{(R+iy)^3}{e^{R+iy}-1}idy\right| \le \int\limits_0^{\pi}\frac{(R^2+\pi^2)^{3/2}}{e^R-1}dy \to 0\,,\text{ երբ } R\to+\infty\,,$$

$$\int\limits_R^0 \frac{(x+i\pi)^3dx}{e^{x+i\pi}-1} = \int\limits_0^R \frac{(x+i\pi)^3dx}{e^x+1} \to \int\limits_0^{\infty}\frac{x^3+3x^2i\pi+3x(i\pi)^2+(i\pi)^3}{e^x+1}dx =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x+1}dx + 3i\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{e^x+1}dx - 3\pi^2\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{e^x+1}dx - i\pi^3\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+1} =$$

$$= \frac{21}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + 3i\pi\cdot\frac{6}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} - 3\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{12} - i\pi^3\ln 2 = \frac{21}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{9i\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} - \frac{\pi^4}{4} - i\pi^3\ln 2,$$

երբ $R\to+\infty$: Ձևափոխելով (5)-ի վերջին ինտեգրալը՝ կստանանք.

$$\int_{\pi}^{0}\frac{(iy)^3 idy}{e^{iy}-1}=-\int_{0}^{\pi}\frac{y^3(e^{-iy}-1)}{(e^{iy}-1)(e^{-iy}-1)}dy=-\int_{0}^{\pi}\frac{y^3(\cos y-1)-iy^3\sin y}{2-2\cos y}dy=\frac{\pi^4}{8}+8i\int_{0}^{\pi/2}y^3 ctgydy:$$

Այսպիսով, (5)-ում կատարելով սահմանային անցում՝ $R\to+\infty$, կստանանք.

$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{21}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{9i\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\frac{\pi^4}{4}-i\pi^3\ln 2+\frac{\pi^4}{8}+8i\int_{0}^{\pi/2}y^3 ctgydy=0:$$

Անջատելով իրական և կեղծ մասերը, կստանանք.

$$\frac{45}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-\frac{\pi^4}{8}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\quad\text{և}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{9}\pi^2\ln 2-\frac{16}{9\pi}\int_{0}^{\pi/2}y^3 ctgydy,$$

որը համընկնում է (2)-ի հետ:

Մասնավորապես, (1) և(2) հավասարություններից բխում է.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\int_{0}^{\pi/2}(4y^2 ctgy-\frac{8}{\pi}y^3 ctgy)dy=\int_{0}^{\pi/2}(4y^2-\frac{8}{\pi}y^3)ctgydy, \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=4\int_{0}^{\pi/2}(y^2-\frac{2}{\pi}y^3)ctgydy: \qquad (7)$$

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


1. Զաքարյան Վ.Ս., Միքայելյան Ի.Ի. *Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության խնդրագիրք*.- Երևան, 1992:
2. Микаелян И.И., Тоноян Г.А. *Некоторые применения теории вычетов.*- Ереван, 1986.
3. Гельфонд А. О. *Вычеты и их приложения*.- М.: Наука, 1966.
4. Հունանյան Ա.Ա. *Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում* .-2009.- Հ. 2.- հոդված 9:



**Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 12.11.2013թ.**


## ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ СУММЫ РЯДА $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$


***А.А. Унанян***



Предлагаются следующие представления для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=$ $=\frac{2}{7}\pi^2\ln 2-\frac{8}{7}\int_{0}^{\pi/2}y^2 ctgydy$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{9}\pi^2\ln 2-\frac{16}{9\pi}\int_{0}^{\pi/2}y^3 ctgydy$, и, как следствие, получается $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=4\int_{0}^{\pi/2}(y^2-\frac{2y^3}{\pi})ctgydy$ .



***Ключевые слова:*** контур, интеграл Эйлера первого рода, ряд Фурье.

# REPRESENTATIONS FOR THE SUM OF $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ SERIES

***A.A. Hunanyan***

The following representations for the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ are suggested: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}= =\frac{2}{7}\pi^2\ln 2-\frac{8}{7}\int_0^{\pi/2} y^2 ctgy dy$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{2}{9}\pi^2\ln 2-\frac{16}{9\pi}\int_0^{\pi/2} y^3 ctgy dy$, from which the following can be deduced $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=4\int_0^{\pi/2}(y^2-\frac{2y^3}{\pi})ctgy dy$ .

***Keywords:*** contour, Eiler's first type integral, Fourier series.

УДК 517.951

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ “ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ” МНОГОЧЛЕНОВ

***С.Р. Айрапетян, В.Н. Маргарян***
(Российско-Армянский (Славянский) университет)
**E-mail:** sofia31337@mail.ru, vachagan.margaryan@yahoo.com

Исследуется связь между разными понятиями “гипоэллиптичности”. Рассматриваются гипоэллиптические, гипоэллиптические относительно группы переменных и гипоэллиптические по Буренкову многочлены. Найдены необходимые условия, при которых частично гипоэллиптические и гипоэллиптические относительно группы переменных многочлены становятся гипоэллиптическими или гипоэллиптическими по Буренкову многочленами .

***Ключевые слова:*** гипоэллиптичность, частичная гипоэллиптичность, гипоэллиптичность относительно группы переменных, гипоэллиптичность по Буренкову.

**1°. Введение.** Пусть $N$ - множество натуральных чисел, $N_0 \equiv N \cup \{0\}$, $N_0^n$ – множество *n*- мерных мультииндексов $(n \in N)$, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, $R^n - n$-мерное вещественное эвклидово пространство точек $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $R_+^n \equiv \{\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1,\dots,n\}$, $C = R \times Ri(i^2 = -1)$.

Для $\xi,\eta \in R^n, k \in N, k < n, \lambda \in R_+^n, \alpha \in N_0^n$ и $t > 0$ обозначим $\xi \equiv (\xi', \xi'')$, $\xi' \equiv (\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\xi'' \equiv (\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$, $\xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$, $\|\xi\| \equiv (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $(\xi,\eta) \equiv \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$, $\xi \cdot \eta \equiv (\xi_1 \cdot \eta_1,\dots,\xi_n \cdot \eta_n)$, $t^\lambda = (t^{\lambda_1},\dots,t^{\lambda_n})$, $\alpha! \equiv \alpha_1!\dots\alpha_n!$, $D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1,\dots,n$.

Пусть $P(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$, $(a_\alpha \in C)$, $\prod_{j=1}^n D_j P \neq 0$- многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) \equiv \{\alpha \in N_0^n, a_\alpha \neq 0\}$. Характеристическим многогранником (х.м.) набора $(P)$ (многочлена $P$) называется минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{H}(P) \subset \mathrm{R}_+^n$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$.

Многогранник $\mathcal{H} \in \mathrm{R}_+^n$ называется $n$- мерным, если существует точка $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n) \in \mathcal{H}$, $\nu_1\dots\nu_n \neq 0$ и окрестность $0(\nu)$ этой точки такая, что $0(\nu) \subset \mathcal{H}$.

Многогранник $\mathcal{H} \subset \mathrm{R}_+^n$ называется вполне правильным, если компоненты всех внешних (относительно $\mathcal{H}$) нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathcal{H}$ положительны.

Для х.м. $\mathcal{H}(P)$ набора $(P) \subset \mathrm{R}_+^n$ через $\wedge(\mathcal{H}(P))$ обозначим замыкание множества единичных внешних нормалей некоординатных граней $\mathcal{H}(P)$.

**Определение 1** (см.[1], определение 11.1.2). Многочлен $P$ называется *гипоэллиптическим*, если для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ при $\|\xi\| \to \infty$

$$P^{(\alpha)}(\xi) / P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi) / P(\xi) \to 0 \ .$$

Известно (см. [1,6]), что:

1) если многочлен $P$ гипоэллиптичен, то любое обобщенное решение уравнения

$$P\left(\frac{D_1}{i}, \ldots, \frac{D_n}{i}\right)\mathcal{U} = 0 \text{ в области } \Omega \subset R^n \tag{1}$$

является бесконечно дифференцируемой функцией;

2) х.м. $\mathcal{H}(P)$ вполне правильный;

3) если $\lambda \in \wedge(\mathcal{H}(P))$, то $\lambda > 0$.

Для х.м. $\mathcal{H}(P)$ многочлена $P$ обозначим:

$\mathcal{H}^0(P)$ - множество вершин многогранника $\mathcal{H}(P)$, $\lambda \in \wedge^{n-1}(\mathcal{H}(P))$ – множество единичных внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней, $\partial\mathcal{H}(P) = \left\{\nu \in \mathcal{H},\ \exists \lambda \in \wedge^{n-1}(\mathcal{H}(P)),\ (\nu, \lambda) = \mathrm{d}(\lambda)\right\}$, где $\mathrm{d}(\lambda) = \max\limits_{\nu \in \mathcal{H}(P)} (\nu, \lambda)$.

**Определение 2** (см. [1], определение 11.2.4 или [2]). Многочлен $P$ называется *частично гипоэллиптическим* относительно $\xi''$, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ при $\|\xi\| \to \infty$, когда $\xi''$ остается ограниченным, $P^{(\alpha)}(\xi) / P(\xi) \to 0$;

2) если $P(\xi)$ представить в следующем виде $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha'} P_{\alpha'}(\xi'')(\xi')^{\alpha'}$, где $P_{\beta'}(\xi'') = \sum\limits_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha' = \beta'}} \gamma_\alpha (\xi'')^{\alpha''}$, то:

а) $P_{0'}(\xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от $\xi''$,

б) $P_{\alpha'}(\xi'') / P_{0'}(\xi'') \to 0$ при $\|\xi''\| \to \infty \quad \forall \alpha' \neq 0$.

Известно (см. [1] или [2]), что если многочлен $P$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi''$, то $\mathcal{U}(\xi) * \varphi(\xi') \in C^\infty$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(R^k)$ для любого обобщенного решения $\mathcal{U}$ уравнения (1).

**Определение 3** (см. [3]). Многочлен $P$ называется *гипоэллиптическим относительно группы* переменных $\xi'$, если для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0,$ как только $\|\xi'\| \to \infty$ .

Известно (см. [3]), что если многочлен $P$ гипоэллиптичен относительно группы переменных $\xi'$, то любое решение $u \in L_2$ уравнения (1) является бесконечно дифференцируемой по $\xi'$ функцией.

**Определение 4.** Скажем, что многочлен $P$ *гипоэллиптичен по Буренкову относительно* $\xi'$ , если (см. [4]) для любого $0 \neq \alpha' \in N_0^k$ при $\|\xi\| \to \infty$

$$P^{(\alpha',0'')}(\xi)/P(\xi) \to 0 .$$

Известно (см. [4]), что если многочлен $P$ гипоэллиптичен относительно $\xi'$, то любое определенным образом стремящееся к нулю в бесконечности решение уравнения (1) , когда $\Omega = \Omega' \times \mathrm{R}^{n-k}$ ($\Omega' \subset \mathrm{R}^k$ область), является бесконечно дифференцируемой функцией.

**Определение 5** (см. [5] или [6]). Многочлен $P$ называется *регулярным* (невырожденным), если с некоторой постоянной $c > 0$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{H}(P) \cap N_0^n} \left|\xi^\alpha\right| \leq \mathrm{c}\left(P(\xi)+1\right), \quad \forall \xi \in R^n.$$

**2°. Многочлены от $n \geq 2$ переменных**

**Предложение 1.** Гипоэллиптический относительно переменных $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$ $(k \in N, k < n)$ многочлен $P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ является частично гипоэллиптическим относительно $\xi'$.

Доказательство непосредственно следует из определений 2 и 3.

**Лемма 1.** *Пусть многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ *гипоэллиптичен относительно группы переменных* $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$ $(k \in N, k < n)$ *и* $\lambda \in \wedge(\mathcal{H}(P))$. *Если для некоторого* $j : 1 \leq j \leq k$, $\lambda_j > 0,$ *то* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) > 0$.

Доказательство. Пусть, наоборот, для некоторого $\lambda \in \wedge(\mathcal{H}(P))$ существуют индексы $j,l; j \neq l; 1 \leq j \leq k;$ $1 \leq l \leq n$ такие, что $\lambda_j > 0$ и $\lambda_l \leq 0$ .

Представим многочлен $P$ по вектору $\lambda$ в виде суммы $\lambda-$однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(a,\lambda)=d_j} a_\alpha \xi^\alpha \ , \quad d_0 > \ldots > d_M \tag{2}$$

и рассмотрим отношение $\dfrac{D_l P(\xi)}{P(\xi)}$ на последовательности $\left\{\xi^s = s^\lambda \cdot b\right\}_{s=1}^{\infty}$, $b \in R^n$ :

$$D_l P_{d_0}(b) \neq 0.$$

Сначала покажем, что при $s \to \infty$ $P(\xi^s) \to \infty$. Так как $\left\|(\xi')^s\right\| \to \infty$ при $s \to \infty$ $(\lambda_j > 0, b_j \neq 0)$, то, в силу условия леммы, для любого $0 \neq \beta \in N_0^n$ $\dfrac{D^\beta P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Так как существует $0 \neq \beta^0 \in N_0^n$ $(P \neq const)$, для которого $D^\beta P(\xi^s) = const \neq 0$, то отсюда получаем, что $P(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$. Отсюда, используя представление $(2)$, нетрудно заметить, что $d_0 > 0$.

Тогда с некоторой постоянной $c_1 > 0$:

$$\left|P(\xi^s)\right| = \left|\sum_{j=0}^{M} S^{d_j} P_j(b)\right| \leq c_1 S^{d_0}. \tag{3}$$

Так как, в силу выбора точки $b$, при достаточно больших $s$

$$\left|D_l P(\xi^s)\right| = \left|\sum_{j=0}^{M} D_l P(\xi^s)\right| \geq \left|D_l P_0(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M}\left|D_l P_j(\xi^s)\right| \geq$$
$$\geq S^{d_0-\lambda_l}\left|D_l P_0(b)\right| - \sum_{j=1}^{M} S^{d_j-\lambda_l}\left|D_l P_j(b)\right| \geq \frac{\left|D_l P_0(b)\right|}{2} S^{d_0-\lambda_l},$$

то, в силу нашего предположения $(\lambda_l \leq 0)$, используя оценку (3) при достаточно больших $s$, имеем

$$\left|\frac{D_l P(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right| \geq \frac{\left|D_l P_0(b)\right|}{2c_1} \cdot \frac{S^{d_0-\lambda_l}}{S^{d_0}} \geq \frac{\left|D_l P_0(b)\right|}{2c_1} > 0.$$

Полученная оценка противоречит условию леммы, т. к. $\left\|(\xi')^s\right\| \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Пусть многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *гипоэллиптичен относительно группы переменных* $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ $(k \in N, k < n)$ $\lambda \in \wedge(\mathcal{H}(P))$ *нормаль грани, для которого некоторая некоординатная грань Γ х. м. многочлена* $Q(\xi') \equiv P(\xi', 0'')$ *является подгранью, тогда* $\lambda > 0$.

Доказательство. Так как $\lambda$ является внешней нормалью $\mathcal{H}(P)$, то, в силу условия леммы, $\lambda'$ является внешней нормалью к грани Γ характеристического многогранника $\mathcal{H}(Q) \subset R_+^k$. Так как многочлен $Q(\xi')$ является гипоэллиптическим (см. предложение 1 и пункт а) определения 2), то $\mathcal{H}(P)$ вполне правильно. Следовательно, $\lambda' > 0$. Тогда, в силу леммы 1, $\lambda > 0$. Лемма доказана.

**Замечание 1.** Утверждение лемм 1 и 2 при $k=n$ тривиально, т.к. тогда многочлен $P$ гипоэллиптичен.

**Теорема 1.** *Характеристический многогранник $\mathcal{H}(P)$ любого гипоэллиптического относительно группы переменных $\xi^{'}=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ $(k\in N)$ многочлена $P(\xi)=P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $(n>k)$ является $n$ - мерным многогранником.*

Доказательство. Предположим обратное, что характеристический многогранник $\mathcal{H}(P)$ гипоэллиптического относительно переменных $\xi^{'}$ многочлена $P$ не $n$ - мерно. Тогда существует вектор $\mu\in R^n, \|\mu\|=1$ такой, что $(\alpha,\mu)=0$, т.к. $0\in\mathcal{H}(P)$ при всех $\alpha\in(P)$. Это означает, что и вектор $\mu$, и вектор $-\mu$ являются внешними нормалями $\mathcal{H}(P)$. Очевидно, в силу вышесказанного можно считать, что $\mu_1\geq 0$ и $\mu\in\wedge(\mathcal{H}(P))$. Так как очевидно, что грань многогранника $\mathcal{H}(Q)$, $(Q(\xi^{'})\equiv P(\xi^{'},0^{''}))$ является подгранью многогранника с нормалью $\mu$, то, в силу леммы 2, $\mu_1>0$. Тогда, в силу леммы 1, $\mu>0$. Но это противоречит определению вектора $\mu$, т.к., в силу условия $D_1P\cdot\ldots\cdot D_nP\neq 0,$ $(P)\setminus\{0\}\neq\varnothing.$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. Теорема 1 доказана.

На примере покажем, что существуют частично гипоэллиптические многочлены, х.м. которых не является $n$ -мерным.

**Пример 1.** Пусть $n=3,$ $P(\xi)=\xi_1^{\,4}+\xi_2^{\,2}\cdot\xi_3^{\,2}$. Очевидно, что

$$D_1P\cdot D_2P\cdot D_3P\neq 0$$

и $P$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi_1$ (см. пункты а), в) определения 2), но

$$\mathcal{H}(P)\subset\left\{\nu\in R_+^3,(\nu,\mu)=0,\ \text{где }\ \mu=(0,1,-1)\right\}.$$

**Теорема 2.** *Многочлен $P(\xi)=P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $2\leq n\in N$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $P$ гипоэллиптичен относительно переменных $\xi^{'}=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ и*

$$\max_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha^{'}\neq 0}}\alpha_n<\max_{\alpha\in(P)}\alpha_n\equiv m_n. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть многочлен $P$ гипоэллиптичен. Тогда из определения 1 непосредственно следует, что многочлен гипоэллиптичен относительно переменных $\xi^{'}$ (см. определение 3).

Покажем выполнение оценки $(4)$. Пусть, наоборот (см. определение $m_n$), существует $\alpha\in(P),\alpha^{'}\neq 0$ такой, что $\alpha_n=m_n$.

Рассмотрим отношение $D^{\alpha^{'}}P(\xi)/P(\xi)$ на последовательности $\{\xi^s=(0^{'},s)_{s=1}^{\infty}\}$.

Из определений числа $m_n$ и последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем $\left|P\left(\xi^s\right)\right| \le c_1 \cdot s^{m_n}, s = 1,2,\dots$.

Из определений последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ и мультииндекса $\alpha$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем, что $\left|D^{\alpha'} P\left(\xi^s\right)\right| \ge c_2 \left|a_{(\alpha',\ m_n)} \cdot \alpha' !\right| s^{m_n},\ s = 1,2,\dots$.

Эти оценки противоречат условию гипоэллиптичности $P$, т.к. $\alpha' \ne 0$ и $\left\|\xi^s\right\| \to \infty$.

Полученное противоречие доказывает, что если многочлен $P$ гипоэллиптичен, то для него верна оценка $(4)$.

Теперь докажем обратное, что если для гипоэллиптического относительно переменных $\xi'$ многочлена $P$ выполняется оценка $(4)$, то многочлен $P$ гипоэллиптичен.

В силу работы [7] достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left|D_j P\left(\xi\right)\right| / \left|P\left(\xi\right)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \left\|\xi\right\| \to \infty .$$

Пусть, наоборот, существуют последовательность $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty} \left\|\xi^s\right\| \to \infty$ при $s \to \infty$, индекс $j : 1 \le j \le n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left|D_j P\left(\xi^s\right) / P\left(\xi^s\right)\right| \ge \varepsilon, \quad s = 1,2,\dots \qquad (5)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) существуют подпоследовательность последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$) и постоянная $c_2 > 0$ такие, что $\left\|\left(\xi'\right)^s\right\| \le c_3,\ s = 1,2,\dots$;

2) $\left\|\left(\xi'\right)^s\right\| \to \infty$ при $s \to \infty.$

В случае 1, представляя многочлен в следующем виде:

$$P\left(\xi\right) = a_{\left(0',m_n\right)} \xi_n^{m_n} + \sum_{j=0}^{m_n-1} \xi_n^j P_j\left(\xi'\right),$$

где $P_j\left(\xi'\right) \equiv \sum_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_n = j}} a_\alpha \left(\xi'\right)^{\alpha'}$, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ при $s \to \infty$ имеем

$$\left|\frac{D_j P\left(\xi^s\right)}{P\left(\xi^s\right)}\right| \le \frac{\left|a_{\left(0',m_n\right)} \cdot m_n\right| \cdot \left|\xi_n^s\right|^{m_n-1} + o\left(\left|\xi_n^s\right|^{m_n-1}\right)}{\left|a_{\left(0',m_n\right)}\right| \cdot \left|\xi_n^s\right|^{m_n} - o\left(\left|\xi_n^s\right|^{m_n}\right)} \to 0, \qquad (6)$$

$$\left|\frac{D_j P\left(\xi^s\right)}{P\left(\xi^s\right)}\right| \le \frac{c_1 \cdot \left|\xi_n^s\right|^{m_n-1}}{\left|a_{\left(0',m_n\right)}\right| \cdot \left|\xi_n^s\right|^{m_n} - o\left(\left|\xi_n^s\right|^{m_n}\right)} \to 0, \quad 1 \le j \le n-1. \qquad (7)$$

В случае 2, т.к. $\left\|\left(\xi'\right)^s\right\| \to \infty$ при $s \to \infty$, то, в силу условия (гипоэллиптичность $P$ относительно группы переменных $\xi'$) теоремы,

$$\left|\frac{D_j P\left(\xi^s\right)}{P\left(\xi^s\right)}\right| \to 0 \text{, когда } s \to \infty, \quad j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{8}$$

Соотношения $(6)-(8)$ противоречат оценке $(5)$. Полученное противоречие доказывает, что если многочлен $P$ гипоэллиптичен относительно группы переменных $\xi'$ и для него выполняется оценка $(4)$, то он гипоэллиптичен. Теорема 2 доказана.

На примере покажем, что утверждение теоремы 2 перестает быть справедливым, если гипоэллиптичность относительно переменных $\xi'$ заменить на частичную гипоэллиптичность относительно $\xi'$.

**Пример 2.** Пусть $n = 2$, $P\left(\xi\right) = \xi_1^2 - 2\xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_2^2$. Нетрудно заметить, что многочлен $P$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi' = \xi_1$ и $2 = m_2 > \max\limits_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_1 \neq 0}} \alpha_n$.

Однако многочлен $P$ не является гипоэллиптическим.

Верна следующая теорема.

**Теорема 3.** *Если для любого* $j : 1 \le j \le n$ *регулярный многочлен* $P\left(\xi\right) = P\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$ *частично гипоэллиптичен относительно* $\xi\left(j\right) = \left(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_n\right)$*, то многочлен* $P$ *гипоэллиптичен.*

Доказательство. Предположим обратное, что утверждение теоремы неверно. Тогда, в силу работы [7], существуют последовательность $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$, $\left\|\left(\xi^s\right)\right\| \to \infty$ при $s \to \infty$, индекс $l : 1 \le l \le n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\frac{\left|D_l P\left(\xi^s\right)\right|}{\left|P\left(\xi^s\right)\right|} \ge \varepsilon\,, \quad s = 1,2,\ldots\,. \tag{9}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) существуют подпоследовательность последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$), индекс $r : 1 \le r \le n$ и постоянная $c_1 > 0$ такие, что $\left|\xi_r^s\right| \le c_1$, $s = 1,2,\ldots;$

2) для любого $r : 1 \le r \le n$ $\xi_r^s \to \infty$ при $s \to \infty$.

Так как многочлен $P$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi(r)$, то противоречие с оценкой (9) в случае 1 непосредственно следует из определения 2.

Пусть выполняется случай 2. Тогда, в силу регулярности многочлена $P$ с некоторыми постоянными $c_2, c_3 > 0$, имеем, что при $s \to \infty$

$$\frac{\left|D_l P\left(\xi^s\right)\right|}{\left|P\left(\xi^s\right)\right|} \leq c_2 \left( \sum_{\substack{\alpha \in H(P) \cap N_0^n \\ \alpha_l \geq 1}} \left| \left(\xi_1^s\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\xi_{l-1}^s\right)^{\alpha_{l-1}} \left(\xi_l^s\right)^{\alpha_l - 1} \left(\xi_{l+1}^s\right)^{\alpha_{l+1}} \cdots \left(\xi_n^s\right)^{\alpha_n} \right| \Big/ \sum_{\alpha \in H(P) \cap N_0^n} \left| \left(\xi^s\right)^{\alpha} \right| \right) \leq$$

$$\leq c_3 \left| \frac{1}{\xi_l^s} \right| \to 0, \quad l = 1, \ldots, n,$$

который в случае 2 противоречит оценке (9).

Полученные противоречия доказывают справедливость утверждения теоремы. Теорема 3 доказана.

На примере покажем, что условие $j = 1, \ldots, n$ теоремы нельзя ослабить.

**Пример 3.** Пусть $n = 3,\ P\left(\xi\right) = \xi_3^6 + \xi_3^4 \cdot \xi_1^2 \cdot \xi_2^4 + \xi_1^8 + \xi_2^6$. Очевидно, многочлен $P$ регулярен. Нетрудно проверить, что многочлен $P$ частично гипоэллиптичен относительно $\left(\xi_1, \xi_2\right)$ и $\left(\xi_1, \xi_3\right)$. Однако многочлен $P\left(\xi\right)$ негипоэллиптичен, так как на последовательности $\xi^s = \left(0, s, s^{1,1}\right)\ s = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\left|D_1^2 P\left(\xi^s\right)\right|}{\left|P\left(\xi^s\right)\right|} = \frac{2 \cdot s^{4,4} \cdot s^4 + s^6}{s^6 + s^8} \to \infty \text{ при } s \to \infty.$$

**Лемма 3.** *Если многочлен $P\left(\xi\right) = P\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$ гипоэллиптичен относительно группы переменных $\xi' = \left(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\right)$, то для любого $\lambda \in \wedge^{n-1}\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right),\ \lambda_n > 0$.*

Доказательство. Так как для любого $\lambda \in \wedge^{n-1}\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right)$ существует индекс такой, что $\lambda_j > 0$, то утверждение леммы непосредственно следует из леммы 1, ибо $\wedge^{n-1}\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right) \subset \wedge\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right)$.

**Следствие 1.** При условиях леммы 3 для любого $\alpha \in \mathcal{H}\left(P\right),\ \alpha_n > 0$ $\left(\alpha', 0\right) \in \mathcal{H}\left(P\right) \setminus \partial\mathcal{H}\left(P\right)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{H}\left(P\right) = \left\{\nu \in R_+^n; \left(\nu, \lambda\right) \leq d\left(\lambda\right), \forall \lambda \in \wedge^{n-1}\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right)\right\}$, где $d\left(\lambda\right) = \max_{\nu \in \mathcal{H}(P)}\left(\nu, \lambda\right)$, то, в силу леммы 3, для любого $\lambda \in \wedge^{n-1}\left(\mathcal{H}\left(P\right)\right)$ $\left(\left(\alpha', 0\right), \lambda\right) = \left(\alpha, \lambda\right) - \alpha_n \cdot \lambda_n < d\left(\lambda\right)$, т.е. $\left(\alpha', 0\right) \in \mathcal{H}\left(P\right) \setminus \partial\mathcal{H}\left(P\right)$.

**Следствие 2.** При условиях леммы 3 $\left(D_n P\right) \subset \mathcal{H}\left(P\right) \setminus \partial\mathcal{H}\left(P\right)$.

Доказательство, в силу выпуклости $\mathcal{H}\left(P\right)$, непосредственно следует из следствия 1.

**Теорема 4.** *Если многочлен $P\left(\xi\right) = P\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$ гипоэллиптичен относительно переменных $\xi' = \left(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\right)$ и $P\left(\xi\right) \to \infty$ при $\left\|\xi\right\| \to \infty$, то $P$ гипоэллиптичен по Буренкову относительно $\xi_n$.*

Доказательство. В силу работы [7], достаточно показать, что при $\|\xi\| \to \infty$

$$\left|D_n P(\xi) / P(\xi)\right| \to 0. \qquad (10)$$

Предположим обратное, что существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}, \|\xi^s\| \to \infty$ при $s \to \infty$ и число $\varepsilon > 0$, для которых

$$\left|D_n P(\xi^s) / P(\xi^s)\right| \geq \varepsilon, \quad s = 1, 2, \dots . \qquad (11)$$

Из условия теоремы при выполнении оценки (11) следует, что существует постоянная $c_1 > 0$, для которой

$$\left\|(\xi')^s\right\| \leq c_1, \quad s = 1, 2, \dots . \qquad (12)$$

Так как, в силу условия теоремы, $P(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то, в силу следствия 3, имеем, что $\left|D_n P(\xi^s) / P(\xi^s)\right| \to 0$ при $s \to \infty$, который противоречит оценке (11).

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. Теорема 4 доказана.

## 3°. Многочлены от двух переменных.

**Теорема 5.** *Если регулярный многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi_1$ и*

$$m_2 \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_2 > \max_{\substack{\alpha \in (P) \\ \alpha_1 \neq 0}} \alpha_2 , \qquad (13)$$

*то многочлен $P$ гипоэллиптичен.*

Доказательство. Доказательство. Пусть $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$, $\|(\xi^s)\| \to \infty$ при $s \to \infty$- любая фиксированная последовательность.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) существуют подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$) и постоянная $c_1 > 0$ такие, что либо: а) $|\xi_2^s| \leq c_1,\ s = 1, 2, \dots$, либо б) $|\xi_1^s| \leq c_1,\ \ |\xi_2^s| \leq c_1,\ s = 1, 2, \dots$;

2) $\xi_j^s \to \infty$ при $s \to \infty,\ j - 1, 2, \dots$.

В случае 1 а) противоречие с оценкой $(11)$ непосредственно следует из условия частичной гипоэллиптичности относительно $\xi_1$ многочлена $P$ теоремы.

В случае 1 б), в силу условия $(13)$, представляя многочлен 1 в следующем виде:

$$P(\xi) = a_{(0,m_2)} \xi_2^{m_2} + \sum_{j=0}^{m_{2-1}} \xi_2^j P_j(\xi_1),$$

где $P_j(\xi_1) = \sum_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_2=j}} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1}$, с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при $s\to\infty$ имеем, что

$$\frac{\left|D_1P(\xi^s)\right| + \left|D_2P(\xi^s)\right|}{\left|P(\xi^s)\right|} \le \frac{c_2\left|\xi_2^s\right|^{m_2-1}}{\left|\xi_2^s\right|^{m_2} + 0\left(\left|\xi_2^s\right|^{m_2}\right)} \to 0,$$

который также противоречит оценке $(11)$.

В случае 2, в силу регулярности многочлена $P$ при $s\to\infty$ с некоторыми постоянными $c_3, c_1 > 0$, имеем, что

$$\frac{\left|D_1P(\xi^s)\right| + \left|D_2P(\xi^s)\right|}{\left|D_1P(\xi^s)\right|} \le c_3\left(\sum_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_1\ge1}}\left|\xi_1^s\right|^{\alpha_1-1}\left|\xi_2^s\right|^{\alpha_2} + \sum_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_2\ge1}}\left|\xi_1^s\right|^{\alpha_1}\left|\xi_2^s\right|^{\alpha_2-1}\right) \Big/ \sum_{\alpha\in(P)}\left|\xi_1^s\right|^{\alpha_1}\left|\xi_2^s\right|^{\alpha_2} \le$$
$$\le c_4\left(\frac{1}{\left|\xi_1^s\right|} + \frac{1}{\left|\xi_2^s\right|}\right) \to 0,$$

который противоречит оценке $(11)$.

Полученные противоречия доказывают справедливость утверждения теоремы. Теорема 4 доказана.

Пример 3 показывает, что аналогичное утверждение при $n > 2$ перестает быть справедливым.

**Лемма 4.** *Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ гипоэллиптичен по Буренкову относительно $\xi_2$, то*

$$m_1 \equiv \max_{\alpha\in(P)} \alpha_1 > \max_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha_2\ne0}} \alpha_1 . \tag{14}$$

Доказательство. Предположим обратное, что (см. определение $m_1$) существует $\beta\in(P), \beta_2 \ne 0$ и $\beta_1 = m_1$.

Рассмотрим отношение $D_2^{\beta_2}P(\xi) / P(\xi)$ на последовательности $\left\{\xi^s = (s,0)\right\}_{s=1}^{\infty}$. Из определений числа $m_1$ и последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем, что

$$\left|P(\xi^s)\right| \le c_1 s^{m_1},\ \ s = 1,2,\ldots \tag{15}$$

Из определений мультииндекса $\beta$ и последовательности $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при достаточно больших $s$ имеем, что

$$\left|D_2^{\beta_2}P(\xi^s)\right| \ge c_2 s^{m_1},\ \ s = 1,2,\ldots \tag{16}$$

Оценки $(15), (16)$ вместе противоречат условию леммы и доказывают справедливость оценки $(14)$ при условиях леммы. Лемма 4 доказана.

**Теорема 6.** *Регулярный многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ гипоэллиптичен относительно $\xi_1$ тогда и только тогда, когда $P$ гипоэллиптичен по Буренкову относительно $\xi_2$.*

Доказательство. Первая часть утверждения доказана в теореме 4.

Покажем, что если регулярный многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ гипоэллиптичен по Буренкову относительно $\xi_2$, то $P$ гипоэллиптичен относительно $\xi_1$. Очевидно, что достаточно показать, что для любой фиксированной последовательности .

$$\left|D_1 P(\xi^s) / P(\xi^s)\right| \to 0, \text{ как только } \xi_1^s \to \infty. \tag{17}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) для некоторой подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$) существует непостоянная $c_1 > 0$, для которой

$$\left|\xi_2^s\right| \le c_1, \; s = 1, 2, \dots ;$$

2) $\xi_1^s \to \infty$, $\xi_2^s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае 1, в силу леммы 4, представляя многочлен $P$ в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = a_{(0,m_1)} \xi_1^{m_1} + \sum_{j=0}^{m_1-1} \xi_1^j P_j(\xi_2),$$

где $P_j(\xi_2) = \sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ \alpha_1 = j}} a_\alpha \xi_2^{\alpha_2}$ при $s \to \infty$, имеем, что

$$\frac{\left|D_1 P(\xi_1^s, \xi_2^s)\right|}{\left|P(\xi_1^s, \xi_2^s)\right|} = \frac{\left|a_{(0,m_1)} m_1\right| \left|\xi_1^s\right|^{m_1-1} + 0\left((\xi_1^s)^{m_1-1}\right)}{\left|a_{(0,m_1)} (\xi_1^s)^{m_1}\right| + 0\left((\xi_1^s)^{m_1}\right)} \to 0. \tag{18}$$

Если же выполняется случай 2, то, в силу регулярности многочлена $P$ с некоторыми постоянными $c_2, c_3 > 0$ при $s \to \infty$, имеем, что

$$\left|\frac{D_1 P(\xi_1^s, \xi_2^s)}{P(\xi_1^s, \xi_2^s)}\right| \le \frac{c_2 \sum_{\substack{\alpha \in H(P) \cap N_0^2 \\ \alpha_{1 \ge 1}}} \left|(\xi_1^s)^{\alpha_1 - 1} (\xi_2^s)^{\alpha_2}\right|}{\sum_{\alpha \in H(P) \cap N_0^2} \left|(\xi_1^s)^{\alpha_1} (\xi_2^s)^{\alpha_2}\right|} \le c_3 \frac{1}{\left|\xi_1^s\right|} \to 0. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) доказывают справедливость соотношения (17) и тем самым справедливость второй части теоремы. Теорема 6 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Хермендер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частичными производными.*- М.: Мир, 1986.
2. Garding L., Malgrange B. *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques* // Math. Scand.- 1961.-No9.- P. 5-21.
3. Eliot R.I. *Almost Hypoelliptic differential operators* // Proceed of the London Math Society.- 1969.- Vol.53,19(3).- P. 537-552.
4. Буренков В.И. *Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности* // Сб. докл. 7-го Советско-Чехословацкого семинара.- Ереван, 1982.- С.63-67.
5. Михайлов В.П. *О поведении на бесконечности одного класса многочленов//* Труды МИАН СССР.- 1965.-150.- С. 143-159.
6. Gindikin S.G., Volevich L. *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations.*- Kluwer, 1992.
7. Казарян Г.Г., Маргарян В.Н. *Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов* // Изв. АН. АрмССCР.- 1986.- XXI, N5.- С. 453-470.


**Материал поступил в редакцию 22.11.2013.**

## «ՀԻՊՈԷԼԻՊՏԻԿ» ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

***Ս.Ռ. Հայրապետյան, Վ.Ն. Մարգարյան***

Ուսումնասիրված են կապեր «հիպոէլիպտիկության» տարբեր հասկացությունների միջև: Դիտարկվում են հիպոէլիպտի և ըստ Բուրենկովի՝ հիպոէլիպտիկ բազմանդամներ: Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում մասնակի հիպոէլիպտիկ և փոփոխականների խմբի նկատմամբ հիպոէլիպտիկ բազմանդամները դառնում են հիպոէլիպտիկ կամ ըստ Բուրենկովի հիպոէլիպտիկ բազմանդամներ:

***Առանցքային բառեր.*** հիպոէլիպտիկություն, մասնակի հիպոէլիպտիկություն, հիպոէլիպտիկություն փոփոխականների խմբի նկատմամբ, հիպոէլիպտիկություն՝ ըստ Բուրենկովի:

## ON SOME PROPERTIES OF «HYPOELLIPTIC» POLYNOMIALS

***S.R. Hayrapetyan, V.N. Margaryan***

The relationship between different concepts of "hypoellipticity" is investigated. Hypoelliptic, hypoelliptic with respect to the group of variables and Burenkov's hypoelliptic polynomials are considered. Sufficient conditions are obtained under which partially hypoelliptic and hypoelliptic with respect to the group of variables polynomials become hypoelliptic or Burenkov's hypoelliptic polynomials.

***Keywords:*** hypoellipticity, partially hypoellipticity , hypoellipticity with respect to the group of variables, Burenkov's hypoellipticity.

УДК 517.948

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

***А. Минасян***

(Ереванский государственный университет)

Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - мультипликативная система и $\epsilon \in (0,1)$. Тогда существует множество $E \subset [0,1)$, $\mid E \mid > 1-\epsilon$ такое, что для любой функции $f(x,y) \in L(E)$ можно найти ряд по мультипликативной системе, который сходится к $f(x)$ по норме $L(E)$, ненулевые коэффициенты которого монотонно убывают по абсолютному значению.

***Ключевые слова***: система Виленкина, алгебраический полином, рациональные коэффициенты.

**1°. Введение.** Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [1, гл.1, §1.5]). Рассмотрим произвольную последовательность натуральных чисел $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\}$, где $p > p_j \geq 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Положим

$$m_k = \prod_{j=1}^{k} p_j \quad \left(p > p_j \geq 2\right). \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0,1,\ldots p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j m_{j-1} \text{�} x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j} \quad \left(\text{т.е. верны } P \text{ - ичные разложения}\right). \tag{2}$$

Отметим, что точки вида $\dfrac{l}{m_k}, l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq m_k - 1$ имеют два различных разложения – конечные и бесконечные, и чтобы мы имели только однозначные разложения, договоримся для этих точек взять только конечные разложения. В результате получаются следующие соответствия:

$$n \to \left\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\right\}; x \to \left\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\right\}.$$

Мультипликативная система, соответствующая последовательности $P$, определяется следующим образом:

$$W_0\left(x\right) \equiv 1;\; W_n\left(x\right) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right). \tag{3}$$

Выражение $(3)$ можем записать в следующей форме:

$$W_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=-1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right)\right)^{\alpha_j}.$$

Из (1), (2) и (3) следует, что $W_{m_{j-1}}(x) = \exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right)$, следовательно, для $n$-й функции получим следующее выражение: $W_n(x) = \prod_{j=1}^{k}\left(W_{m_{j-1}}(x)\right)^{\alpha_j}$. Очевидно, что системы, соответствующие разным последовательностям $\{p_k\}$, отличаются друг от друга (в случае, когда $P \equiv \{2,2,\dots,2,\dots\}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша):

$$\left(\int_0^1 W_n(t)\overline{W}_k(t)dt = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}\right)$$

Отметим, что в 1957 году Ватари [4] доказал, что мультипликативная система является базисом в $L^r$ при $r > 1$. Затем в 1976 году Янг Восанг [5] для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в $L^r$ при $r > 1$.
В настоящей работе доказывается следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть* $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *- мультипликативная система. Тогда для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E$, $|E| > 1 - \epsilon$ *такое, что для каждой функции* $f(x,y) \in L(E)$ *существует ряд* $\sum_{s,k=1}^{\infty} a_{s,k} W_{n_s}(x) W_{n_k}(y)$ *с* $|a_{s,k}| \searrow 0$, *который сходится к функции* $f$ *по норме* $L^1(E)$.

**2°. Основная лемма.** Для доказательства теоремы мы будем использовать следующую лемму, которую нетрудно получить из леммы 3 [6] (см. также [7] и [8]).

**Лемма 1.** *Пусть* $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *- мультипликативная система. Тогда для всех* $\epsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $N_0 \in \mathbb{N}(N_0 \gg 1)$ *и любой* $f(x,y) \in L[0,1)$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1)$ *и полином по d системе вида*

$$Q(x) = \sum_{s,k=N_0}^{\bar{N}} a_k W_{n_s}(x) W_{n_k}(y)$$

*такие, что:*

*1)* $|E| > 1 - \epsilon$,

*2)* $0 < |a_{s,k}| \leq \delta, \quad |a_{s,k}| \searrow$,

*3)* $\int_E |Q(x,y) - f(x,y)|\, dxdy < \varepsilon$,

*4)* $\max_{N_0 < M \leq \bar{N}} \int_E |\sum_{s,k=N_0}^{\bar{N}} a_k W_{n_s}(x) W_{n_k}(y)|\, dxdy \leq 2\int_E |f(x,y)|\, dxdy$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\epsilon > 0$ - произвольное число и $\left\{f_n\left(x,y\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Последовательным применением леммы 1 мы можем определить последовательности измеримых множеств $\left\{E_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов по системе $\left\{W_s\left(x\right)W_k\left(y\right)\right\}_{s,k=0}^{\infty}$ вида

$$Q_n\left(x,y\right) = \sum_{s,k=M_n+1}^{M_{n+1}} a_{s,k} W_{n_s}\left(x\right) W_{n_k}\left(y\right)\ ,\ \ n = 1,2,\dots; M_n \nearrow \ \ (M_0 = 1)$$

такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{E_n} \left|f_n\left(x,y\right) - Q_n\left(x,y\right)\right| dxdy < 2^{-4n}, \quad \left|E_n\right| > 1 - \epsilon 2^{-n},$$

$$\max_{\mathrm{M_n} < M,N \le \mathrm{M_{n+1}}} \int_{E_n} \left| \sum_{s,k=M_n}^{M,N} a_{s,k} W_{n_s}\left(x\right) W_{n_k}\left(y\right) \right| dxdy \le 2\int_{E_n} \mid f_n(x,y) \mid dxdy\ ,$$

$$\left|a_{s+1,k+1}\right| \le \left|a_{s,k}\right| < \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad k \in [M_n, M_{n+1})\ .$$

Положим $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, очевидно, что $\left|E\right| > 1 - \epsilon$. Пусть $f\left(x\right) \in L(E)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{Q_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ из $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\int_{E} \left| f\left(x,y\right) - \sum_{\nu=1}^{q} Q_{n_\nu}\left(x,y\right) \right| dxdy < 2^{-q} \to 0,$$

$$\max_{\mathrm{M_{n_\nu}} < M,N \le \mathrm{M_{n_\nu+1}}} \int_{E} \left| \sum_{s,k=M_{n_\nu}+1}^{M,N} a_{s,k} W_{n_s}\left(x\right) W_{n_k}\left(y\right) \right| dxdy < 2^{-\nu} \to 0.$$

Отсюда вытекает, что ряд

$$\sum_{s,k=1}^{\infty} a_{s,k} W_{n_s}\left(x\right) W_{n_k}\left(y\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{n_\nu}\left(x\right)$$

сходится к $f(x,y)$ по $L(E)$ норме и $\left|a_{s,k}\right| \searrow 0$ . Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*.- М.: Наука, 1987.
2. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*.- Баку: Элм, 1981.-180 с.
3. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Изв. АН СССР. Сер. Мат.-1947.- Т. 11.– С. 363-400.

4. Watari C. *On generalizes Walsh-Fourier series* // I. PProc. Japan Acad.- 1957.-73, N 8.- P. 435-438.
5. Young W.-S. *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series* // Trnas. Amer. Math. Soc.- 1976.- 218.- P. 311-320.
6. Григорян М.Г., Саркисян С.А. *Нелинейная аппроксимация функций класса $L^r$ по системе Виленкина* // Изв. вузов. Матем.- 2012.-N.11.- С. 1-10.
7. Grigoryan M.G. *On the representation of functions by orthogonal series in weighted $L^p$ spaces//*Studia. Math.- 1999.-134(3).- P. 207-216.
8. Григорян М.Г. *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация//* Матем. сб.- 2012.- 203:3.- С. 49-78.
9. Episkoposian S.A., Grigorian M.G. *Convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system* // J. Math. Anal. Appl.- 2012.- 389.- P. 1374-1379.
10. Grigorian M.G. *Uniform convergence of the greedy approximation with respect to the Walsh system* // Studia Mathematica.- 2010.- 198.- P. 197-206.


**Материал поступил в редакцию 12.12.2013.**

## ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐՈՎ՝ ԸՍՏ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ

***Ա. Մինասյան***

Դիցուք $\left\{W_k\left(x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ -ն բազմապատիկ համակարգ է՝ և $\epsilon \in \left(0,1\right)$: Այդ դեպքում գոյություն ունի $E$ չափելի բազմություն՝ $E \subset \left[0,1\right)$, $\left|E\right| > 1-\epsilon$ այնպես, որ կամայական $f\left(x,y\right) \in L(E)$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել մոդուլով նվազող գործակիցներով կրկնակի շարք՝ ըստ բազմապատիկ համակարգի, որը զուգամիտում է այդ ֆունկցիային $L(E)$ նորմով:

***Առանցքային բառեր.*** բազմապատիկ համակարգ, , կրկնակի շարք, ֆունկցիային $L(E)$ նորմով զուգամիտ.

## ON THE REPRESENTATION FUNCTIONS BY SERIES WITH RESPECT TO THE MULTIPLICATIVE SYSTEM

***A. Minasyan***

Let $\left\{W_k\left(x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ be the multiplicative system, and let $\epsilon \in \left(0,1\right)$ Then exists a measurable set $E \subset \left[0,1\right)$, $\left|E\right| > 1-\epsilon$ such that for any function $f\left(x,y\right) \in L(E)$ one can find a series with respect by multi system which converges to $f\left(x,y\right)$ in $L(E)$ norm, and the absolute values of non-zero coefficients of that series are monotonically decreasing.

***Keywords:*** multiplicative system, series, convergece in the $L(E)$ norm.

УДК 512.57

# СООТНОШЕНИЯ ВИЕТА ДЛЯ НЕЧИСЛОВЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Л.В. Акопян*
(Московский физико-технический институт)
E-mail: loran.akopyan@gmail.com

Представлено возможное обобщение теоремы Виета для основных и побочных лианитовых корней алгебраических уравнений.
***Ключевые слова:*** лианитовые корни, сопровождающие многочлены.

Существование нечисловых (лианитовых) корней алгебраических уравнений приводит к необходимости обобщения классических соотношений Виета. В зависимости от свойств данного множества лианитов число основных и побочных лианитовых корней, в общем случае, не совпадает со степенью исходного многочлена:

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=\sigma_2+\sigma_1,\\ \sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\dots,y_n)=\\ \qquad =[x_1\,(y_1+y_2\,),x_2\,(y_1+y_3),\dots,x_{n-1}\,(y_1+y_n\,),x_n\,y_1\,]\neq\sigma_2\,\sigma_1.\end{cases} \quad (1)$$

Пусть множество $n$-элементных лианитов $(N=n)$ задано в пределах алгебры. Алгебра (1) не коммутативна и не ассоциативна, а только дистрибутивна по умножению: $\sigma_1(\sigma_2+\dots+\sigma_n)=\sigma_1\sigma_2+\dots+\sigma_1\sigma_n$. При лианитовом аналоге комплексного числа $k=(k,0,\dots,0)$ лианит $e=(1,0,\dots,0)$ является правой единицей: $\sigma\cdot e\equiv\sigma$. Любой алгебраический многочлен с ненулевыми коэффициентами и степенью $1\le n_0\le n$ обладает над этим множеством $n$-элементных лианитов единственным основным корнем:

$$f^n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n\,;\sigma_1=\left(-a_1,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\dots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right);\ a_i\neq0,$$

$$f^{n-1}(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1}\,;\sigma_2=\left(-b_1,\frac{b_2}{b_1},\frac{b_3}{b_2},\dots,\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}},0\right);\ b_i\neq0, \quad (2)$$

$$f^{n-2}(x)=x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\dots+c_{n-3}x+c_{n-2};\sigma_3=\left(-c_1,\frac{c_2}{c_1},\frac{c_3}{c_2},\dots,\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}},0,0\right);\ c_i\neq\ 0,$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\ \dots\quad\dots\quad\dots\ \dots$$

$$f^1(x)=x+a_0;\quad \sigma=(-a_0,0,\dots,0);\ \ a_0\neq0\,.$$

Над этим же множеством лианитов (1) любой многочлен степени $1<n_0\le n$ обладает и побочными лианитовыми корнями [1-3]. Однако при лианитовом аналоге $k=(0,0,\dots,0,k)$ исключительно только $f^n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+$ $+a_n$ обладает единственным основным корнем, а именно: $\sigma_1=(x_1,x_2,\dots,x_n)=$

$\left(-a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$. Между тем любые многочлены степени меньше $n$ не обладают ни побочными, ни основными лианитовыми корнями над множеством (1).

Пусть $f^n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ с числовыми корнями $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ задан над любым множеством $N$-элементных лианитов ($N > 1$) в пределах алгебры, коммутативной по сложению и, в общем случае, только дистрибутивной по умножению. Из определений основных и побочных лианитовых корней следует, что основным корням соответствует сочетание структуры $\{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n-1}, x_n\}$ ($C_n^n = 1$). Всем остальным сочетаниям $\{x_{0i}\}$, $\{x_{0i}, x_{0j}\}$, $\{x_{0i}, x_{0j}, x_{0\ell}\}$, ..., т.е. $C_1^n, C_2^n, \dots, C_{n-1}^n$, соответствуют лишь побочные корни (при $n > N$ все корни только побочные). Пусть $n_1, n_2, \dots, n_n$ - число возможных основных корней для многочленов степени $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ соответственно. Отдельные $n_i$ могут быть равны нулю. Это означает, что у соответствующего многочлена степени $i$ ($1 \le i \le n$) при данном лианитовом аналоге $k$ над множеством $N$-элементных лианитов основных корней нет вовсе. Если $n_i = 1$, то элементы основного лианитового корня многочлена степени $i$, очевидно, суть дробно-рациональные функции буквенных коэффициентов этого же многочлена. Тогда в общей системе поиска всевозможных основных и побочных лианитовых корней исходного $f^n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x +$ $+ a_n$, т.е. $f^n(\sigma) = (0, 0, \dots, 0)$, относительно хотя бы одного из искомых элементов лианитовых корней $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ степень соответствующего сопровождающего многочлена должна быть $n_0 = C_n^n \cdot n_n + C_{n-1}^n \cdot n_{n-1} + \dots + C_3^n \cdot n_3 + C_2^n \cdot n_2 + C_1^n \cdot n_1$. С учетом того, что все элементы искомых основных и побочных лианитовых корней являются числовыми корнями соответствующих сопровождающих многочленов системы поиска $f^n(\sigma) = (0, 0, \dots, 0)$, очевидно, что множество всевозможных сумм $\sum \sigma_i$, $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j$, $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_\ell$, ..., составленных для отдельных сочетаний $C_n^n, C_{n-1}^n, C_{n-2}^n, \dots, C_3^n, C_2^n, C_1^n$, являются лианитами, элементы которых суть дробно-рациональные функции коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ исходного многочлена $f^n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Именно в этом аспекте представляется возможное обобщение теоремы Виета на случай основных и побочных лианитовых корней $f^n(x)$ над данным множеством лианитов. Очевидно, при составлении симметрических выражений $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j$, $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_\ell$, ... следует учесть фактор коммутативности и ассоциативности по умножению. Если умножение некоммутативно и неассоциативно, то для всякого $\sigma_i \sigma_j$ следует взять и $\sigma_j \sigma_i$, а для $\sigma_i \sigma_j \sigma_\ell$- еще $\sigma_i \sigma_\ell \sigma_j$, $\sigma_j \sigma_i \sigma_\ell$, $\sigma_j \sigma_\ell \sigma_i$, $\sigma_\ell \sigma_i \sigma_j$, $\sigma_\ell \sigma_j \sigma_i$ и т.д.

Пусть множество двухэлементных лианитов задано в пределах алгебры:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = [x_1(y_1 + y_2) + x_2 y_1, x_2 y_2 - x_1 y_1] = \tag{3}$$
$$= \sigma_2 \, \sigma_1; \; k = (0, k).$$

Алгебра (3) коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по умножению, $e = (0,1)$ - единица. Линейные и квадратные уравнения разрешимы над этим множеством, следовательно, любой $f^n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $(n > 2)$ обладает только побочными корнями (ибо лианиты (3) двухэлементные). В частности, для $f^3(x) = x^3 + bx + c$ условие $f^3(\sigma) = \sigma^3 + b\sigma + c = (0,0)$ дает систему

$$\begin{cases} 3x_2^2x_1 + 3x_1^2x_2 + bx_1 = 0,\ x_1 \neq 0,\ x_1 = -\left(\frac{b+3x_2^2}{3x_2}\right), \\ x_2^3 + bx_2 - c - (x_1^3 + 3x_1^2x_2) = 0, \quad x_2 \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Подстановкой $x_1 = -\left(\frac{b+3x_2^2}{3x_2}\right)$ во второе уравнение системы (4) получим общий сопровождающий многочлен системы $f^3(\sigma) = (0,0)$, а именно: $z^6(x_2) = -27x_2^6 + 27cx_2^3 + b^3$. Имеем

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}\,. \tag{5}$$

Итак, существует ровно шесть побочных для $f^3(x) = x^3 + bx + c$ лианитовых корней $\sigma_\ell = (x_1^\ell, x_2^\ell) = \left[-\left(\frac{b+3x_2^2}{3x_2}\right), x_2\right]$, каждому из которых над множеством комплексных чисел соответствует $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell x + q_\ell$ $(\ell = 1,2,\dots,6)$. Их числовые корни - заведомо корни исходного $f^3(x)$ также. Действительно, над множеством лианитов (3) для любого $f^2(x) = x^2 + px + q$ условие $f^2(\sigma) = \sigma^2 + \sigma \cdot p + q = (0,0)$ дает:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + px_1 = 0,\ x_1 \neq 0,\ x_1 + 2x_2 + p = 0, \\ x_2^2 - x_1^2 + px_2 + q = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) следует, что над множеством (3) любой $f^2(x) = x^2 + px + q$ обладает двумя основными лианитовыми корнями $\sigma = (x_1, x_2) = [-(p + 2x_2), x_2]$. Следовательно, сопровождающий многочлен $z(x_2)$ системы $f^3(\sigma) = (0,0)$ действительно должен иметь степень $C_2^3 \cdot 2 = 6$, как это следует из (4) (по условию $x_1 \neq 0$ побочные корни структуры $\sigma = (x_1, x_2) = (0, x_2)$, равносильные числовым, не учитываются). Как известно, значения $p$ совпадают с числовыми корнями $f^3(x) = x^3 + bx + c$. Следовательно, нет необходимости восстановления явных видов искомых $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell x + q_\ell$ из системы (6) с использованием (5). Из (6) с учетом (4) имеем: $p = -x_1 - 2x_2 = \frac{b+3x_2^2}{3x_2} - 2x_2 = \frac{b}{3x_2} - x_2$. Взяв любое значение $x_2$ из (5), получим формулу Кардано с одним кубическим радикалом. Из (5) следует ровно шесть значений $x_2$, а именно: $x_{21} = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$, $Bx_{21}, Dx_{21}, x_{22} = \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$, $Bx_{22}, Dx_{22}$, где $B$ и $D$- первообразные корни уравнения $x^3 - 1 = 0$; $B, D = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $B^2 = D$, $D^2 = B$, $i = \sqrt{-1}$. Следовательно, побочные лианитовые корни $f^3(x) = x^3 + bx + c$ (они являются основными для $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell x + q_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, 6$) имеют структуры

$$\sigma_1 = \left(-\frac{b + 3x_{21}^2}{3x_{21}}, x_{21}\right); \ \sigma_2 = \left(-\frac{b + 3Dx_{21}^2}{3Bx_{21}}, Bx_{21}\right); \ \sigma_3 = \left(-\frac{b + 3Bx_{21}^2}{3Dx_{21}}, Dx_{21}\right);$$

$$\sigma_4 = \left(-\frac{b+3x_{22}^2}{3x_{22}}, x_{22}\right); \ \sigma_5 = \left(-\frac{b+3Dx_{22}^2}{3Bx_{22}}, Bx_{22}\right); \ \sigma_6 = \left(-\frac{b+3Bx_{22}^2}{3Dx_{22}}, Dx_{22}\right). \quad (7)$$

Подмножества $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ и $\sigma_4$, $\sigma_5$, $\sigma_6$ в отдельности составляют систему классических соотношений Виета, а именно: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (0, 0)$, $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = (0, b)$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (0, -c)$, а все шесть лианитов (7) составляют такую же систему для $f^6(x) = (x^3 + bx + c)^2$. Нетрудно, однако, убедиться, что соотношения Виета имеют более глубокое содержание. Рассмотрим, к примеру, множество двухэлементных лианитов

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2);$$

$$\sigma_1\sigma_2 = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = [x_1(y_1 + y_2), x_2 y_1]. \quad (8)$$

Как нам уже известно, при $k = (0, k)$ $f^1(x) = x + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ неразрешимо над множеством (8), т.е. $n_1 = 0$ по сочетаниям $\{x_{0i}\}$. У $f^2(x) = x^2 + px + q$ единственный основной корень: $\sigma = (x_1, x_2) = \left(-p, \frac{q}{p}\right)$, $p \neq 0$, следовательно, по сочетаниям $\{x_{0i}, x_{0j}\}$ имеем $n_2 = 1$. Тот же $f^3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ обладает только побочными корнями, ибо множество двухэлементных лианитов (8) не фиксирует наличие сочетания $\{x_{01}, x_{02}, x_{03}\}$. Степень сопровождающего многочлена системы $f^3(\sigma) = \sigma^3 \cdot 1 + \sigma^2 \cdot a + {}+\sigma \cdot b + c = (0, 0)$ определяется как $C_1^3 \cdot n_1 + C_2^3 \cdot n_2 = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$. Если степень сопровождающего многочлена получается меньше, то у $f^3(x)$, очевидно, имеется пара числовых корней $\pm x_{0i}$. Так как $\sigma = (x_1, x_2) = \left(-p, \frac{q}{p}\right)$ $(p \neq 0)$, то имеем

$$\sigma_1 = \left(x_{01} + x_{02}, -\frac{x_{01} \cdot x_{02}}{x_{01} + x_{02}}\right); \ \sigma_2 = \left(x_{01} + x_{03}, -\frac{x_{01} \cdot x_{03}}{x_{01} + x_{03}}\right); \quad (9)$$

$$\sigma_3 = \left(x_{02} + x_{03}, -\frac{x_{02} \cdot x_{03}}{x_{02} + x_{03}}\right).$$

С учетом теоремы Виета для числовых корней $x_{01}$, $x_{02}$, $x_{03}$ многочлена $f^3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ легко убедиться, что суммы $\sum \sigma_i$, $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2$ и $\sum \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_\ell$ являются лианитами, элементы которых дробно-рациональные функции коэффициентов $a$, $b$, $c$ исходного $f^3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Например: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \left(-2a, \frac{b^2 + ac}{ab - c}\right)$. Над множеством двухэлементных лианитов (8) очень просто получается формула Феррари для вычисления числовых корней многочлена четвертой степени: $f^4(x) = x^4 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0$. Условие $f^4(\sigma) = \sigma^4 \cdot 1 + {}+\sigma^2 \cdot b_0 + \sigma \cdot c_0 + d_0 = (0, 0)$ дает

$$\begin{cases} x_1^4 + 2x_1^3 x_2 + b_0 x_1^2 + c_0 x_1 = 0, \ \ x_1 \neq 0, \ \ x_2 = -\left(\frac{x_1^3 + b_0 x_1 + c_0}{2x_1^2}\right), \\ x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + b_0 x_1 x_2 + d_0 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Подстановка $x_2$ во второе уравнение системы (10) приводит относительно $x_1$ к сопровождающему многочлену вида $z^6(x_1) = x_1^6 + 2b_0x_1^4 + (b_0^2 - 4d_0)x_1^2 - c_0^2$ (вспомним, что над множеством (8) у $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell \cdot x + q_\ell$ существует единственный основной корень $\sigma_\ell = \left(x_1^\ell, x_2^\ell\right) = \left(-p_\ell, \frac{q_\ell}{p_\ell}\right)$, $p_\ell \neq 0$, следовательно, степень $z(x_1)$ действительно равна: $C_2^4 \cdot 1 = 6$). Обозначая $x_1^2 = y$, получим

$$y^3 + 2b_0y^2 + (b_0^2 - 4d_0)y - C_0^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11), очевидно, есть известное резольвент-уравнение Лагранжа. Каждому из шести побочных корней $\sigma = (x_1, x_2) = \left(x_1, -\frac{x_1^3 + b_0x_1 + c_0}{2x_1^2}\right) = \Big(x_{0i} +$ *+x0j,* *−x0i·x0jx0i+x0j* соответствует $f_\ell^2(x) = x^2 - x_1 \cdot x - x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x + \frac{x_1^3 + b_0x_1 + c_0}{2x_1}$, числовые корни $x_{0i}$, $x_{0j}$ $(i \neq j)$ которого также являются корнями исходного $f^4(x) = x^4 + b_0x^2 + c_0x + d_0$ ($x_1^2 = y$ суть числовые корни резольвент-уравнения (11)).

Рассмотрим множество трехэлементных лианитов:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1y_2 + x_2y_1, x_2y_2 - x_3y_3, x_2y_3 + x_3y_2 + x_1y_1); \quad (12)$$

$$k = (0, k, 0).$$

Алгебра (12) коммутативна и дистрибутивна по умножению, но не ассоциативна, $e = (0, 1, 0)$ - правая единица (сложение коммутативно). Многочлен $f^3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, помимо побочных корней, обладает и основными. При $x_1 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ условие $f^3(\sigma) = \sigma^3 + \sigma^2 \cdot a + \sigma \cdot b + c = (0, 0, 0)$ дает

$$x_1^2 = \pm\left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27\sqrt{b - \frac{a^2}{3}}}\right); \quad x_3^2 = b - \frac{a^2}{3}; \quad x_2 = -\frac{a}{3}. \quad (13)$$

В частности, при $a = 0$ имеем

$$\sigma_1 = \left(\sqrt{\frac{c}{\sqrt{b}}}, 0, \sqrt{b}\right); \sigma_2 = \left(-\sqrt{\frac{c}{\sqrt{b}}}, 0, \sqrt{b}\right);$$

$$\sigma_3 = \left(\sqrt{-\frac{c}{\sqrt{b}}}, 0, -\sqrt{b}\right); \sigma_4 = \left(-\sqrt{-\frac{c}{\sqrt{b}}}, 0, -\sqrt{b}\right). \quad (14)$$

Так как лианиты (14) коммутативны, но не ассоциативны, то из 24 возможных произведений $\sigma_i\sigma_j\sigma_\ell$ следует взять половину, ибо $\sigma_i(\sigma_j\sigma_\ell) = \sigma_i(\sigma_\ell\sigma_j)$. То же самое для всевозможных $\sigma_i\sigma_j\sigma_\ell\sigma_k$. В развернутом виде имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = (0, 0, 0); \quad a = 0,$$

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_4 = (0, 2b, 0),$$

$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_3\sigma_4) + \sigma_2(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4) + \sigma_3(\sigma_1\sigma_4 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_2) +$$
$$+\sigma_4(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = (0, -4c, 0),$$

$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3\sigma_4+\sigma_3\sigma_2\sigma_4+\sigma_4\sigma_2\sigma_3)+\sigma_2(\sigma_1\sigma_3\sigma_4+\sigma_3\sigma_1\sigma_4+\sigma_4\sigma_1\sigma_3)+\sigma_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_4+\sigma_2\sigma_1\sigma_4+ +\sigma_4\sigma_1\sigma_2)+\sigma_4(\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_2\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\sigma_2)=(0,12b^2,0). \quad (15)$$

Таким образом, в более общем понимании соотношения Виета не являются простым следствием разложения исходного многочлена по числовым корням: $x-x_{0i}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Небезынтересно также, что формулу Кордано можно получить и через основные корни исходного $f^3(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (без приведения к виду $f^3(y)=y^3+b_0y+c_0$). Пусть множество трехэлементных лианитов задано в пределах алгебры коммутативной, ассоциативной и дистрибутивной по умножению (сложение коммутативно):

$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2,x_3y_3+x_1y_2+ +x_2y_1,x_2y_2+x_1y_3+x_3y_1);\ k=(k,0,0). \quad (16)$$

Из условия $f^3(\sigma)=\sigma^3+\sigma^2\cdot a+\sigma\cdot b+c=(0,0,0)$ получим $(e=(1,0,0)$ единица):

$$\begin{cases} x_1^3+x_2^3+x_3^3+a(x_1^2+2x_2x_3)+6x_1x_2x_3+bx_1+c=0,\\ 3x_2^2x_3+3x_3^2x_1+3x_1^2x_2+a(x_3^2+2x_1x_2)+bx_2=0,\\ 3x_3^2x_2+3x_2^2x_1+3x_1^2x_3+a(x_2^2+2x_1x_3)+bx_3=0. \end{cases} \quad (17)$$

Основные лианитовые корни (их ровно шесть) получаются из условия

$$x_1=-\frac{a}{3};\quad x_2\neq x_3;\quad x_2x_3=\frac{a^2-3b}{9};\quad x_2^3+x_3^3=\frac{9ab-2a^3-27c}{27}. \quad (18)$$

В случае $x_2=x_3\neq 0$ следуют побочные корни, соответствующие сочетаниям структуры $\{x_{0i},x_{0j}\}$, а при $x_2=x_3=0$, $x_1\neq 0$ получаются побочные корни $\sigma_i=(x_1^i,0,0)$, равносильные числовым: сочетания $\{x_{0i}\}$. Складывая уравнения системы поиска (17), получим: $(x_1+x_2+x_3)^3+a(x_1+x_2+x_3)^2+b(x_1+x_2+x_3)+c=0$. Число $x_{0\ell}=x_1+x_2+x_3$ существует и является числовым корнем $f^3(x)=x^3+ax^2+bx+c$, ибо система $f^3(\sigma)=(0,0,0)$ всегда совместна по условию (18). Из (18), очевидно, следует формула Кардано в общем случае. При $a=0$ $(x_1=-\frac{a}{3}=0)$ имеем $x_3=-\frac{b}{3x_2}$, $x_2^6+cx_2^3-\frac{b^3}{27}=0$. Обозначая через $x_{21}=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}$, $x_{22}=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}$, получим явные формы для всех шести основных лианитовых корней исходного $f^3(x)$ при $a=0$:

$$\sigma_1=\left(0,x_{21},-\frac{b}{3x_{21}}\right);\ \sigma_2=\left(0,Bx_{21},-\frac{b}{3Bx_{21}}\right);\ \sigma_3=\left(0,Dx_{21},-\frac{b}{3Dx_{21}}\right);$$
$$\sigma_4=\left(0,x_{22},-\frac{b}{3x_{22}}\right);\ \sigma_5=\left(0,Bx_{22},-\frac{b}{3Bx_{22}}\right);\ \sigma_6=\left(0,Dx_{22},-\frac{b}{3Dx_{22}}\right). \quad (19)$$

В (19) $B$ и $D$- первообразные корни $x^3-1=0$. Подмножества $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ в отдельности составляют систему классических соотношений Виета.

Алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры еще более наглядно осуществимо над множеством:

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)=\sigma_2+\sigma_1,\\ \sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1+\ x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)=\sigma_2\,\sigma_1;\ \ k=(k,0).\end{cases} \quad (20)$$

Алгебра (20) коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по сложению и умножению, $e=(1,0)$ - единица. Линейное уравнение $x+a_0=0$ обладает единственным основным лианитовым корнем: $\sigma_0=(-a_0,0)$. При любых $p$ и $q$ трехчлен $f^2(x)=x^2+px+q$ обладает двумя основными лианитовыми корнями. Действительно, условие $f^2(\sigma)=(0,0)$ дает $\sigma^2+\sigma\cdot p+q=(x_1^2+x_2^2,2x_1x_2)+(px_1,px_2)+(q,0)=(x_1^2+x_2^2+px_1+q,2x_1x_2+px_2)=(0,0)$. При $x_2\neq 0$ (случай $x_2=0$ равносилен поиску числовых корней) получим

$$\sigma_1=(x_1^1,x_2^1)=\left(-\frac{p}{2},+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right);\ \ \sigma_2=(x_1^2,x_2^2)=\left(-\frac{p}{2},-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right). \quad (21)$$

Особенность множества (20) в том, что для любого исходного $f^n(x)=x^n+$ $+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ сумма элементов каждого из возможных побочных лианитовых корней $\sigma_\ell=\left(x_1^\ell,x_2^\ell\right)$, т.е. $x_{0\ell}=x_1^\ell+x_2^\ell$, является числовым корнем $f^n(x)$. Действительно, нетрудно доказать, что $\sigma^n=[f_1^n(x_1,x_2),f_2^n(x_1,x_2)]$ дается правилом:

если $n$ четно, то

$$f_1^n(x_1,x_2)=C_n^n\cdot x_1^n+C_{n-2}^n\cdot x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+C_0^n\cdot x_2^n;$$
$$f_2^n(x_1,x_2)=C_{n-1}^n\cdot x_1^{n-1}\cdot x_2+C_{n-3}^n\cdot x_1^{n-3}x_2^3+\cdots+C_1^n\cdot x_1\cdot x_2^{n-1};$$

если $n$ нечетно, то (22)

$$f_1^n(x_1,x_2)=C_n^n\cdot x_1^n+C_{n-2}^n\cdot x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+C_1^n\cdot x_1\cdot x_2^{n-1};$$
$$f_2^n(x_1,x_2)=C_{n-1}^n\cdot x_1^{n-1}\cdot x_2+C_{n-3}^n\cdot x_1^{n-3}x_2^3+\cdots+C_0^n\cdot x_2^n.$$

Составляя систему $f^n(\sigma)=\sigma^n+a_1\sigma^{n-1}+a_2\sigma^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\sigma+a_n=(0,0)$ и суммируя оба уравнения этой системы ($C_i^n$ – биномиальные коэффициенты), получим $(x_1+x_2)^n+a_1(x_1+x_2)^{n-1}+a_2(x_1+x_2)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(x_1+x_2)+a_n=0$ (при условии, что эти побочные корни $\sigma_\ell=\left(x_1^\ell,x_2^\ell\right)$ существуют). При $n=2$, согласно (21), они существуют, следовательно, при $n>2$ предполагаемые побочные лианитовые корни должны иметь структуру: $\sigma_\ell=\left(x_1^\ell,x_2^\ell\right)=\left[\frac{x_{0i}+x_{0j}}{2},\pm\left(\frac{x_{0i}-x_{0j}}{2}\right)\right]$, где $x_{0i},x_{0j}$ - предполагаемые числовые корни исходного $f^n(x)$. Итак, требуется доказать, что любой $f^n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, заданный над множеством лианитов (20), обладает побочными корнями структуры $\sigma_\ell=\left(x_1^\ell,x_2^\ell\right)=\left[\frac{x_{0i}+x_{0j}}{2},\pm\frac{x_{0i}-x_{0j}}{2}\right]$, что равносильно существованию числовых корней $x_{0i}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Пусть, в общем случае, у исходного $f^n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ числовых корней

$x_{0i}$ нет. Тогда система поиска возможных побочных лианитовых корней, т.е. $f^n(\sigma) = \sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + a_2\sigma^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\sigma + a_n = (0,0)$, либо тривиально несовместна, либо же формально-совместна (допустим, после исключения искомого $x_2$) по схеме

$$\begin{cases} F_1(x_1) = z_1(x_1) \cdot F_{01}(x_1), \\ F_2(x_1) = z_1(x_1) \cdot F_{02}(x_1). \end{cases} \tag{23}$$

$z_1(x_1)$ - общий сопровождающий многочлен системы поиска $f^n(\sigma) = (0,0)$. Так как у исходного $f^n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, по предположению, числовых корней нет, то их не может быть и у $z_1(x_1)$. Следовательно, $z_1(x_1)$ не может обладать делителями. Пусть $f_0^m(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ - любой иной "пробный" многочлен с общим сопровождающим многочленом $u_1(x_1)$ для соответствующей системы $f_0^m(\sigma) = (0,0)$. Тогда система поиска возможных побочных лианитовых корней для многочлена $G^{m+n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^m(x)$ также вынуждена быть либо тривиально несовместной, либо же формально-совместной по некоторому сопровождающему многочлену $z_2(x_1)$. Так как множество двухэлементных лианитов (20) дистрибутивно по умножению и $z_1(x_1)$, $u_1(x_1)$ не обладают делителями, то сопровождающий многочлен $z_2(x_1)$ системы поиска $G^{m+n}(\sigma) = (0,0)$ не может обладать другими делителями, кроме как $z_1(x_1)$, $u_1(x_1)$, а именно: $z_2(x_1) \equiv z_1(x_1) \cdot u_1(x_1)$. В роли $f_0^m(x)$ возьмем многочлен $f_0^n(x) = x^n + x_0 \cdot a_1x^{n-1} + x_0^2 \cdot a_2x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1} \cdot a_{n-1}x + x_0^n \cdot a_n$ $(x_0 \neq 0,\ m = n)$. С использованием формул (22) нетрудно составить соответствующие системы поиска, т.е. $f^n(\sigma) = (0,0)$, $f_0^n(\sigma) = (0,0)$, $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$. Пусть $n$ четно. Сокращая второе уравнение системы $f^n(\sigma) = (0,0)$ на $x_2 \neq 0$ (минуя этим чисто формальный поиск побочных корней структуры $\sigma_\ell = (x_1^\ell, x_2^\ell) = (x_1^\ell, 0)$), относительно $x_2$ получим систему

$$\begin{cases} x_2^n + 0 \cdot x_2^{n-1} + \alpha_2(x_1, a_1, \ldots)x_2^{n-2} + 0 \cdot x_2^{n-3} + \alpha_4(x_1, a_1, \ldots)x_2^{n-4} + \cdots \\ \qquad \ldots + (x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2\, x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n), \\ (nx_1 + a_1)x_2^{n-2} + 0 \cdot x_2^{n-3} + \beta_2(x_1, a_1, \ldots)x_2^{(n-4)} + \cdots \\ \qquad \ldots + [nx_1^{n-1} + a_1(n-1)x_1^{n-2} + a_2(n-2)x_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1}]. \end{cases} \tag{24}$$

Основной матричный корень первого уравнения системы (24):

$$\sigma_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \cdots & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & \cdots & 0, & 1 \\ -f_1^n(x_1), & 0, & -\alpha_{n-2}(x_1, a_1, \ldots), & 0 & \cdots & -\alpha_2(x_1, a_1, \ldots), & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Подстановка матрицы (25) во второе уравнение системы (24) приводит к матрице, вдоль главной диагонали которой фигурируют рациональные многочлены степени $(n-1)$, а остальные элементы этой же матрицы либо нули, либо дробно-рациональные многочлены с различными алгебраическими размерностями. Сопровождающий многочлен $z_1(x_1)$ системы (24), как известно, совпадает с определителем полученной матрицы. Очевидно, $z_1(x_1)$ будет многочленом степени $n(n-1)$ (все элементы – слагаемые определителя этой матрицы суть рациональные многочлены алгебраической размерности $n(n-1)$). Аналогичный результат получается и при нечетной степени $n$ исходного $f^n(x)$ (в этом случае целесообразна подстановка матричного корня второго уравнения $f^n(\sigma) = (0,0)$ в первое). Итак, при любых $n$ системы поиска предполагаемых побочных лианитовых корней, а именно: $f^n(\sigma) = (0,0)$, $f_0^n(\sigma) = (0,0)$, $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$, всегда формально-совместны по схеме (23), соответственно, с сопровождающими многочленами $z_1^{n(n-1)}(x_1)$, $u_1^{n(n-1)}(x_1)$, $z_2^{2n(2n-1)}(x_1)$. Если у исходного $f^n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, в общем случае, числовых корней $x_{0i}$ изначально нет, то корней $x_0 \cdot x_{0i}$ $(x_0 \neq 0)$ нет также и у $f_0^n(x) = x^n + x_0 \cdot a_1x^{n-1} + x_0^2 \cdot a_2x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1} \cdot a_{n-1}x + x_0^n \cdot a_n$. Следовательно, общий сопровождающий многочлен системы поиска лианитовых корней для $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ (т.е. $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$) относительно искомого $x_1$ должен иметь вид: $z_2(x_1) = z_1^{n(n-1)}(x_1) \cdot u_1^{n(n-1)}(x_1)$ и степень $2n(n-1)$. Между тем, согласно полученному результату, степень $z_2(x_1)$ равна $2n\,(2n-1)$, ибо степень многочлена $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ равна $2n$. Одновременно, помимо делителей $z_1(x_1)$, $u_1(x_1)$, оказывается, у $z_2^{2n(2n-1)}(x_1)$ всегда существует некий делитель $z_0^n(x_1)$, фигурирующий двухкратно ($z_0^n(x_1)$ отсутствует в исходных системах поиска $f^n(\sigma) = (0,0)$, $f_0^n(\sigma) = (0,0)$). В однозначном существовании $z_0^n(x_1) \cdot z_0^n(x_1)$ легко убедиться, если в системе $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$ взять $x_2 = \pm\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right) \cdot x_1$. Тогда система $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$ превращается в совместную систему с сопровождающим многочленом $z_0^n(x_1)$:

$$\begin{cases} F_1^{2n}(x_1) = \left[x_1^n + \left(\frac{1+x_0}{2}\right) a_1x_1^{n-1} + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^2 a_2x_1^{n-2} + \cdots \right. \\ \qquad \left. \ldots + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^{n-1} a_{n-1}x_1 + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^n a_n\right] \cdot F_{01}^n(x_1), \\ F_2^{2n}(x_1) = \left[x_1^n + \left(\frac{1+x_0}{2}\right) a_1x_1^{n-1} + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^2 a_2x_1^{n-2} + \cdots \right. \\ \qquad \left. \ldots + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^{n-1} a_{n-1}x_1 + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^n a_n\right] \cdot F_{02}^n(x_1). \end{cases} \tag{26}$$

Так как $2n(2n-1) - n(n-1) - n(n-1) - 2n = 2n(n-1) \neq 0$ ($z_0^n(x_1)$ фигурирует двухкратно), то общий сопровождающий многочлен системы $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$, т.е. $z_2^{2n(2n-1)}(x_1)$, в действительности обладает и четвертым делителем $v_1^{2n(n-1)}(x_1)$, который также отсутствует в исходных системах $f^n(\sigma) = (0,0)$, $f_0^n(\sigma) = (0,0)$. Иными словами: $z_2^{2n(2n-1)}(x_1) = z_1^{n(n-1)}(x_1) \cdot u_1^{n(n-1)}(x_1) \cdot [z_0^n(x_1)]^2 \cdot v_1^{2n(n-1)}(x_1)$. Генерирование дополнительных делителей $[z_0^n(x_1)]^2$, $v_1^{2n(n-1)}(x_1)$ при переходе от $f^n(x)$, $f_0^n(x)$ к $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ и есть неопровержимое доказательство, что общий сопровождающий многочлен $z_2^{2n(2n-1)}(x_1)$ системы $G^{2n}(\sigma) =$

$(0,0)$ обладает числовыми корнями $x_1^\ell$ $[\ell = 1, 2, \dots, 2n(2n-1)]$. Следовательно, над множеством двухэлементных лианитов (20) многочлен $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ обладает (согласно (21)) побочными лианитовыми корнями структуры: $\sigma_\ell = (x_1^\ell, \pm x_2^\ell) = \left[\frac{x_{0i}-x_{0j}}{2}, \pm\left(\frac{x_{0i}-x_{0j}}{2}\right)\right]$. Соответствующие им $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell x + q_\ell = x^2 - 2x_1^\ell \cdot x + \left[\left(x_1^\ell\right)^2 - \left(x_2^\ell\right)^2\right]$, согласно теореме об основных лианитовых корнях [1-3], являются делителями $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ (каждый в отдельности). Так как над множеством (20) любой из $f_\ell^2(x) = x^2 + p_\ell x + q_\ell$ обладает двумя основными лианитовыми корнями $\sigma_\ell^1 = (x_1^\ell, +x_2^\ell)$, $\sigma_\ell^2 = (x_1^\ell, -x_2^\ell)$, то степени соответствующих сопровождающих многочленов, очевидно, определяются как $n_0 = C_2^N \cdot n_2 = \frac{N(N-1)}{2} \cdot 2 = N(N-1)$ ($n_2 = 2$, $N$ – степень исходного $f^n(x)$, $f_0^n(x)$ и $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$). Из структуры побочных для $f^n(x)$, $f_0^n(x)$ и $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x)$ лианитовых корней, а именно: $\sigma_\ell = (x_1^\ell, \pm x_2^\ell)$, вытекает, что каждый из числовых корней $x_1^\ell$ общего сопровождающего многочлена системы $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$, т.е. $z_2^{2n(2n-1)}(x_1)$, фигурирует двухкратно. Следовательно, все сопровождающие многочлены систем $f^n(\sigma)$, $f_0^n(\sigma)$, $G^{2n}(\sigma) = (0,0)$ должны быть полными квадратами, что и имеет место при нахождении этих многочленов по методу основных матричных корней, т.е. $z_1^{n(n-1)}(x_1) = \left[z_{1,0}^{\frac{n(n-1)}{2}}(x_1)\right]^2$, $u_1^{n(n-1)}(x_1) = \left[u_{1,0}^{\frac{n(n-1)}{2}}(x_1)\right]^2$, $v_1^{2n(n-1)}(x_1) = \left[v_{1,0}^{n(n-1)}(x_1)\right]^2$. Это действительно имеет место. Таким образом, многочлен $G^{2n}(x) = f^n(x) \cdot f_0^n(x) = [f^n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n] \cdot [f_0^n(x) = x^n + x_0 \cdot a_1 x^{n-1} + x_0^2 \cdot a_2 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1} \cdot a_{n-1}x + x_0^n \cdot a_n]$ обладает ровно $2n$ числовыми корнями: $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, x_0 \cdot x_{01}, x_0 \cdot x_{02}, \dots, x_0 \cdot x_{0n}$. Число возможных сочетаний из $2n$ корней по два корня равно $C_2^{2n} = (2n-1) \cdot n$. Следовательно, исходя из структуры побочных для этого многочлена лианитовых корней: $\sigma_\ell = (x_1^\ell, x_2^\ell) = \left[\frac{x_{0i}+x_{0j}}{2}, \pm\left(\frac{x_{0i}-x_{0j}}{2}\right)\right]$, степень сопровождающего многочлена относительно искомого $x_1^\ell = \frac{x_{0i}+x_{0j}}{2}$ определится как $C_2^{2n} \cdot 2 = n(2n-1) \cdot 2 = 2n(2n-1)$. Сочетаниям структуры $\{x_{0i}, x_{0j}\}$ и $\{x_0 \cdot x_{0i}, x_0 \cdot x_{0j}\}$ соответствуют двухкратно фигурирующие делители, а именно: $z_1^{n(n-1)}(x_1) = \left[z_{1,0}^{\frac{n(n-1)}{2}}(x_1)\right]^2$, $u_1^{n(n-1)}(x_1) = \left[u_{1,0}^{\frac{n(n-1)}{2}}(x_1)\right]^2$ (число соответствующих сочетаний $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$). Они являются общими сопровождающими многочленами систем поиска $f^n(\sigma) = (0,0)$, $f_0^n(\sigma) = (0,0)$. Ровно $n$ сочетаниям структуры $\{x_{0i}, x_0 \cdot x_{0i}\}$ соответствует сопровождающий многочлен из (26), т.е. $z_0^n(x_1) = x_1^n + \left(\frac{1+x_0}{2}\right) a_1 x_1^{n-1} + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^2 a_2 x_1^{n-2} + \dots + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^{n-1} a_{n-1} x_1 + \left(\frac{1+x_0}{2}\right)^n a_n$ с числовыми корнями: $\frac{x_{01}+x_0\cdot x_{01}}{2}$, $\frac{x_{02}+x_0\cdot x_{02}}{2}$, ..., $\frac{x_{0n}+x_0\cdot x_{0n}}{2}$. Всем остальным $2n(n-1)$ сочетаниям структуры $\{x_{0i}, x_0\cdot x_{0j}\}$, где $x_{0i}\neq x_{0j}$, соответствует делитель $v_1^{2n(n-1)}(x_1)=\left[v_{1,0}^{n(n-1)}(x_1)\right]^2$. $v_1^{n(n-1)}(x_1)$ с числовыми корнями $x_1^{\ell}=\frac{x_{0i}+x_0\cdot x_{0j}}{2}$ $[\ell=1,2,\dots,2n(n-1);\, x_{0j}\neq x_{0i}]$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Акопян Л.В. *Нечисловые корни алгебраических уравнений.* Сообщение 1 // Ученые записки ЕГУ.- 2007.- 2.- С. 23-34.
2. Акопян Л.В. *Нечисловые корни алгебраических уравнений.* Сообщение 2 // Ученые записки ЕГУ.- 2007.- 3.- С. 33-43.
3. Акопян Л.В., Акопян В.С. *Решение уравнения деления круга без периодов Гаусса* // ДАН РА.- 2010.- 110(4).- С. 348-358.
4. Ван Дер Варден Б.Л. *Алгебра*.- М.: Наука, 1979.- 623 с.
5. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*.- М.: Наука, 1968.- 431 с.


**Материал поступил в редакцию 04.10.2013.**

## ՎԻԵՏԻ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՉ ԹՎԱՅԻՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

***Լ. Վ. Հակոբյան***

Ներկայացված է Վիետի առնչությունների հնարավոր ընդհանրացումը հանրահաշվական հավասարումների հիմնական և երկրորդային լիանիտային արմատների համար:

***Առանցքային բառեր.*** լիանիտային արմատներ, ուղեկցող բազմանդամներ:

## THE VIETA RELATIONS FOR NON-NUMERIC ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

***L.V. Hakobyan***

Vieta Formulas for the principal and secondary lianit roots to the algebraic equations are generalized .

***Keywords:*** lianit roots, associated polynomials.

UDC 517.948

# ON THE REPRESENTATION OF FUNCTIONS BY SCHAUDER SERIES

***T.M. Grigoryan***

(Russian-Armenian (Slavonic) University)

We prove that for each $f \in C[0,1]$ there is a Schauder series such that for every $\varepsilon > 0$ there is a measurable set $E$ contained in $[0,1]$, with $|E| > 1-\varepsilon$, on which the series converges unconditionally to $f$ in the uniform norm .

***Keywords:*** Faber-Schauder system, unconditional, uniform, convergence.

**1°. Introduction.** First, we recall the definition of the Faber-Schauder system $\{\varphi_n(x) : n = 0,1,\ldots\}$, $x \in [0,1]$, where $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ and for $n = 2^k + i$, $k = 0,1,\ldots$, $i = 1,2\ldots,2^k$:

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{if} \quad x = x_n = x_k^{(i)} = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{linear and continuous on} & \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}\right]. \end{cases}$$

For $2 \le n = 2^k + i$ we set $\Delta_n = \Delta_k^{(i)} = \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right)$, the set of points, where the function $\varphi_n(x)$ is different from zero. We also recall that the Faber-Schauder system forms a basis in the space $C[0,1]$ (see [1]) that is, any function $f \in C[0,1]$ can be uniquely represented by the series $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ with respect to the Faber-Schauder system, which converges to $f$ uniformly on $[0,1]$. The $A_n(f)$ coefficients of this series are defined by $A_0(f) = f(0)$, $A_1(f) = f(1) - f(0)$:

$$A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right].$$

There are number of interesting results on the properties of the Faber-Schauder system. (see [3-7])

**Definition 1**. A basis $\{f_k : k = 1,2\ldots\}$ of a Banach space $B$ is said to be *unconditional* if for an arbitrary permutation $\{\sigma_k : k = 1,2\ldots\}$ of the natural numbers, the system $\{f_{\sigma(k)}(x) : k = 1,2\ldots\}$ is also a basis of $B$.

Let $E \subset [0,1]$ be a measurable set and let $C(\mathrm{E})$ be the class of all continuous functions defined on $E$ , and let $b_n(x) \in C(E)$, $n = 1,2\ldots$

**Definition 2**. The series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ is said to be *unconditionally convergent* to $f(x)$ in $C(\mathrm{E})$ if for any permutation $\{\sigma(k) : k = 1,2...\}$ of the natural numbers, the series $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}(x)$ converges to $f(x)$ uniformly on $E$.

**Definition 3**. The system $\{f_k : k = 1,2\ldots\}$ is said to be an *unconditional system* of the representation of functions in the class $C(\mathrm{E})$ if for every function $f(x) \in C(E)$ there exists a series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ such that it unconditionally converges to $f(x)$ in $C(E)$.

We note that in the space $C[0,1]$ there exists no unconditional basis (see [2]). And what is more, it was proved in [3] that there exists a function $f_0(x) \in C[0,1]$ and a permutation $\{\sigma(k) : k = 1,2..\}$ of natural numbers such that the series $\sum_{k=0}^{\infty} A_{\sigma(k)}(f_0)\varphi_{\sigma(k)}(x)$ diverges with respect in measure on $[0,1]$. But, nevertheless, for every $0 < \varepsilon < 1$ there exists a measurable set $E \in [0,1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$ , such that the Faber-Schauder system is an unconditional system of representation of functions of the class $C(E)$ (see [4]). In this paper we prove the following theorem.

**Theorem**. *Corresponding to each $f \in C[0,1]$ there is a Schauder series that converges to $f$ on a set of full measure, such that for every $\varepsilon > 0$ there is a measurable set $E$ contained in $[0,1]$, with $|E| > 1 - \varepsilon$, on which the series converges unconditionally to $f$ in $C(\mathrm{E})$.*

Of course, these results can not be improved by replacing the set $E$ with $[0,1]$, since as Karlin has shown, there is no unconditional basis for $C[0,1]$ (see [2]).

**2°. Proof of the Theorem.** Let $f(x)$ function $f(x) \in C[0,1]$ be given, and let $f_1$ be a binary step function such that $\|f - f_1\| < \frac{1}{8}$. By virtue of Lemma 3 of [4], there is a measurable set $E_1 \subset [0,1]$ and a Schauder polynomial $Q_1(x) = \sum_{n=2}^{m_1} A_n \varphi_n(x), |A_n| \le \frac{1}{2}$ such that $Q_1(x) = f_1(x)$ for all $x \in E_1$ , $|E_1| > 1 - \frac{1}{4}$, for each $B_1 \subset \{2,\ldots m_1\}$, $\left|\sum_{n\in B_1} A_n \varphi_n(x)\right| \le | f_1(x) |$ for all $x \in E_1$. Let the binary step function $f_2$ satisfy $\|(f - Q_1) - f_2\| < \frac{1}{8}$ and again applying lemma 3 of [4] we find the Schauder polynomial of the form $Q_2(x) = \sum_{n=m_1+1}^{m_2} A_n \varphi_n(x), |A_n| \le \frac{1}{3}$ which coincides with $f_2$ on the measurable set $E_2 \subset [0,1]$, where $|E_2| > 1 - \frac{1}{8}$ and for each $B_2 \subset \{m_1 + 1,\ldots, m_2\}$ , $\left|\sum_{n\in B_2} A_n \varphi_n\right| \le |f_2(x)|$ for all $x \in E_2$, where $|A_n| \le \frac{1}{2}$ for each $n \in (m_1, m_2]$. Then $|f(x) - (Q_1 + Q_2)(x)| < \frac{1}{8}$ for all $x \in E_2$. From this we obtain

$$\left|\sum_{n\in B_2} A_n \varphi_n(x)\right| \le |f_2(x)| \le |(f - Q_1)(x) - f_2(x)| + |(f - Q_1)(x)| < \frac{3}{8}; \forall x \in E_1 \cap E_2.$$

Proceeding thus inductively, one determines a sequence $\{Q_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ of Schauder polynomials

$$Q_j(x) = \sum_{n=m_{j-1}+1}^{m_j} A_n \varphi_n(x), |A_n| \le \frac{1}{j+1};\ \forall\ n \in (m_{j-1} m_{j,}],$$

and a sequences $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ are measurable subsets of $[0,1]$ such that

$$|E_j| > 1 - \frac{1}{2^{j+1}};\ j = 1,2\ldots \left|f(x) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(x)\right| < \frac{1}{2^{n+1}}; \forall x \in E_n;\ n \ge 1,$$

and for each $B_j$ contained in the set $\{m_{j-1} + 1,\ldots, m_j\}$,

$$\left|\sum_{n\in B_j} A_n \varphi_n(x)\right| < \frac{3}{2^{n+1}}\ \forall x \in E_{j-1} \cap E_j;\ j \ge 1.$$

We put $\sum_{j=1}^{\infty} A_n \varphi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=m_{j-1}+1}^{m_j} A_n \varphi_n$, and $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (\mathrm{E}_k)$. Let $x \in B$, then for some $n_0 \in N$ we have $x \in E_n, \forall n > n_0$. Indeed if $\pi$ be a permutation of $N$, and if $N_n$ be chosen so that $\{\pi(k) : 1 \le k \le N_n\} \supset \{i : 1 \le i \le m_n\}\ \forall n > n_0$ then for arbitrary $M > N_n$ and $x \in E_n, \forall n > n_0$ we get

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{M}A_{\pi(k)}(x)\right| \le \left|f(x)-\sum_{j=n+1}^{m_j}Q_j(x)\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{3}{2^{j+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

I.e. the series $\sum_{i=1}^{\infty}A_n\varphi_n = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=m_{j-1}+1}^{m_j}A_n\varphi_n$ converges unconditionally to $f$ in the uniform norm on $E_n$, $\forall n > n_0$, and $A_n \to 0$ as $n \to \infty$. Theorem is proved.

## REFERENCES


1. Schaude J. *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen* // Math. Z.- 1927.-26.- P. 47-65.
2. Karlin S. *Bases in Banach spaces* // Duke Math. J.- 1948.-15.- P. 971-985.
3. Grigorian M.G., Sargsyan A.A. *Nonlinear approximation of continuous functions by the Faber--Schauder system* // Mat.Sb.- 2008.- Vol.199:5.- P. 629-653.
4. Grigoryan T.M. *On the unconditional convergence of series with respect to the Faber-Schauder system* // Analysis Mathematica.- 39(213).- P. 179-188.
5. Talalyan A.A. *Representation of measurable functions by series* // Usp. Mat. Nauk.- 1960.- 15, no. 5 (Russian).Russian Math. Surveys, 1.
6. Casper Goffman. *Remark on a problem of Lusin* // Acta Math.- 1964.- Vol 111.- P. 63--72.
7. Krotov V.G. *On the series by the Faber - Schauder system and by bases in C[0,1]* // Mat. Zamet.- 1973.- Vol.14.- P.185-195.
8. Episkoposyan S.A. *On the existence of universal series by trigonometric system* // Journal of Functional Analysis.- 2006.- 230.- P. 169-183.


## ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ՇԱՈՒԴԵՐԻ ՇԱՐՔԵՐՈՎ


***Տ.Մ. Գրիգորյան***



Կամայական անընդհատ ֆունկցիայի համար կառուցված է զրոյի ձգտող գործակից-ներով Շաուդերի շարք, որը մեկին ինչքան ասեք մոտ չափ ունեցող բազմությունների վրա ոչ պայմանական և հավասարաչափ զուգամիտում է այդ ֆունկցիային:



***Առանցքային բառեր.*** Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգ, շարք, ոչ պայմանական և հավասարաչափ զուգամիտություն:


## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ШАУДЕРА


***Т.М. Григорян***



Для любой непрерывной функции $f(x)$ построен ряд Шаудера, который на некотором множестве $E \subset [0,1)$ с $|E| > 1-\epsilon$, $\forall\ \epsilon \in (0,1)$ безусловно и равномерно сходится к $f(x)$.



***Ключевые слова***: система Фабера-Шаудера, безусловная и равномерная сходимость.

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

# CONTENTS

★ ★ ★

«Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական ժողովածուն լուսաբանում է բարձրագույն և հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը: Ժողովածուում տպագրվում են հանրապետության բուհերի, հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների, մասնագետների՝ այդ ուղղությամբ կատարած հետազոտությունները, մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում ստացված ժամանակակից արդյունքները: Ժողովածուն նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, հայցորդների, ուսուցիչների, դասախոսների համար:

Հոդվածները կարող են ներկայացվել հայերեն, ռուսերեն, անգլերեն լեզուներով:

★ ★ ★

Научно-методический сборник «Математика в высшей школе» освещает актуальные вопросы преподавания математики в общеобразовательной и высшей школе. В сборнике печатаются современные результаты, полученные в разных областях математики, а также исследования в этом направлении, сделанные специалистами, преподавателями вузов республики, учителями общеобразовательных школ. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, соискателей, учителей, преподавателей вузов.

Статьи могут быть представлены на армянском, русском, английском языках.

★ ★ ★

Guidance collection «Mathematics in high school» covers modern basic questions of teaching mathematics in general educational and high school. Results received nowadays in different fields of mathematics as well as researches in this direction made by specialists, lecturers of Higher Educational Institutions of the republic and teachers of general educational schools are published here. The collection is designed for students, post-graduate students, competitors, teachers, lecturers.

Articles can be submitted in Armenian, Russian, English.

## ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ՊԱՀԱՆՋՆԵՐԸ

Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Տեքստի տառատեսակը՝ Sylfaen, տառաչափը՝ 10pt, տողերի հեռավորությունը՝ 1 տող, էջի ֆորմատը՝ A4 (210 × 297մմ), լուսանցքները. վերևից՝ 5սմ, ներքևից՝ 5,1սմ, ձախից՝ 5,75սմ, աջից՝ 1,75սմ:

Հոդվածի վերնագիրը տրվում է գլխատառերով, մեջտեղում, **bold**, 12pt տառաչափով, իսկ հեղինակի(ների) Ա. Հ. Ազգանունը(ները)՝ փոքրատառերով, միայն սկզբնատառերը՝ մեծատառ, ***bold Italic***, 11pt տառաչափով:

Համառոտագրերը տրվում են երեք լեզուներով, 9pt տառաչափով, 5-6 առանցքային բառերով:

Բոլոր բանաձևերը և մաթեմատիկական արտահայտությունները տրվում են MathType (Euclid10.eqp) կամ Microsoft Equation 4.0, *Italic*, 10pt տառաչափով: Հիմնական բանաձևերը ներկայացվում են առանձին տողով, մեջտեղում և համարակալվում են նույն էջի անկյունում՝ փակագծերի մեջ:

Օգտագործված գրականությունը համարակալվում է ըստ հղումների հերթականության՝ [1],[2],… տեսքով: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը չպետք է գերազանցի 10 էջը: Տեքստի վերջում տրվում են հոդվածի ներկայացման ամսաթիվը և տարեթիվը:

Հոդվածը գրախոսվում է:

**Վերոհիշյալ պահանջները բավարարող հոդվածը** (2 օրինակ) և հոդվածի ֆայլը՝ գրված Microsoft Office Word (*.doc կամ *.docx) ֆորմատով, ներկայացվում է ժողովածուի պատասխանատու քարտուղարին: Խմբագրական խորհուրդն իրավունք ունի վերջնական խմբագրման ենթարկել հոդվածները: Խորհրդի կողմից հրատարակման չերաշխավորվելու դեպքում հոդվածը չի վերադարձվում:

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи представляются на армянском, русском или английском языках. Объем статьи не должен превышать 10 печатных страниц. Шрифт – Sylfaen, размер шрифта – 10pt, межстрочный интервал – 1. Формат страницы – A4 (210×297мм). Поля: сверху – 5см, снизу – 5.1 см, слева – 5.75см, справа – 1.75см. Название статьи набирается заглавными буквами, выравнивание по центру, шрифт: **bold**, размер шрифта – 12pt. И.О.Фамилия автора(ов) набирается строчными буквами, шрифт: ***bold italic***, размер шрифта – 10pt. Аннотация представляется на трех языках, размер шрифта – 9pt. 5–6 ключевых слов также на трех языках. Все формулы и математические выражения набираются редактором MathType (Euclid10.eqp) или Microsoft Equation 4.0, *italic*, размер шрифта – 10pt. Формулы набираются с новой строки в центре, номер формулы ставится в конце строки, в скобках. Цитированная литература нумеруется по порядку ссылки в статье, в квадратных скобках ( [1],[2],… ). В конце статьи пишется дата (число/месяц/год) представления статьи. Статья в двух экземплярах и файл статьи в формате Microsoft Office Word (*.doc или *.docx) представляется ответственному секретарю. **Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.** Представленные статьи рецензируются. Отклоненные редакционным советом статьи не возвращаются. Редакционный совет оставляет за собой право окончательного редактирования статьи.

## ARTICLE DESIGNING GUIDELINES

Articles may be presented in the Armenian, Russian or English languages. The whole size of an article should not exceed 10 printed pages. Font - Sylfaen, font size - 10pt, line spacing - 1. Paper size - A4(210×297mm), margins: top - 5sm, bottom- 5.1sm, left - 5.75sm, right - 1.75sm. The name of article is typed in block letters, alignment on the center, font style - **bold**, the size - 12pt. Initials of the author(s) are typed by lower case letters, font style - ***bold italic***, the size - 10pt. The abstracts are presented on three languages, with 5-6 keywords, font size 9pt. All formulas and mathematical expressions should be typed by MathType (Euclid10.eqp) or Microsoft Equation editor, font style – *italic*, the size – 10pt. Basic formulas are typed since a new line in the center. The number of the formula is put in the end of a line, in brackets. The references are numerated in square brackets ( [1],[2],… ) in order of occurrence in the article. In the end of article the date (number/month/year) of submission of the article should be written. Articles, printed in 2 copies with the file written in Microsoft Office Word (*.doc or *.docx) format, should be submitted to the responsible secretary. **Articles issued without observance of these rules, return without consideration**. Presented articles are reviewed. Articles rejected by the editorial board do not return. The editorial board reserves the right to the final edition of the article.

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ
ԳԻՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

**ՀԱՏՈՐ 9 № 3**

---

# МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
СБОРНИК НАУЧНЫХ И МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ

**ТОМ 9 № 3**

---

# MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL
COLLECTION OF SCIENTIFIC AND METHODICAL ARTICLES

**VOLUME 9 № 3**

---

**Խմբագիրներ՝**
*Ժ.Ս. Մելքանյան*
*Է. Ց. Պետրոսյան*

**Տեխնիկական խմբագիր**
*Ա.Ս. Տոնոյան*

Ստորագրված է տպագրության՝ 13.03.2014թ.:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Ֆորմատ՝ (70×100) 1/16:
Շարվածքը՝ համակարգչային:
Տառատեսակը՝ Sylfaen: 3.75 տպ. մամ.:
Պատվեր՝73 , Տպաքանակ՝ 110

Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարանի տպարան
Երևան, Տերյան 105,
Հեռ.՝ 520 356

Типография Государственного Инженерного Университета Армении
Ереван, ул. Теряна 105,
Тел.: 520 356

Printing house of State Engineering University of Armenia
105 Teryan str. Yrevan,
Tel. 520 356