ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ՀԱՏՈՐ 10 № 1

«ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ»
ԵՐԵՎԱՆ 2014

Ընդգրկված է Հայաստանի Հանրապետության Բարձրագույն որակավորման հանձնաժողովի (ՀՀ ԲՈՀ) կողմից ընդունված թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունների արդյունքների տպագրման համար ընդունելի պարբերականների ցանկում՝ «Մաթեմատիկա» և «Մանկավարժություն» մասնագիտությունների համար 23.03.2007:

ՀՏԴ 51
ԳՄԴ 22.1

Մ 151 **Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում:** - Եր.: ՀՊՃՀ «Ճարտարագետ» հրատ., 2014.- Հատոր 10, № 1.- 56 էջ:

Խմբագրության հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան 105, ՀՊՃՀ, մասնաշենք 12, սենյակ 12202

Հեռ.: +(37410) 56-28-82

E-mail: mathdep@seua.am

Web: www.math.seua.am

facebook www.facebook.com/pages/Mathematics-in-High-School/339572519477837

ISSN 1829-3344

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(ПОЛИТЕХНИК)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF REPUBLIC OF ARMENIA
STATE ENGINEERING UNIVERSITY OF ARMENIA
(POLYTECHNIC)

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОМ 10 № 1

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

VOLUME 10 № 1

«ЧАРТАРАГЕТ»
ЕРЕВАН 2014

«TCHARTARAGET»
YEREVAN 2014

Включен в список периодических изданий, допустимых для публикования результатов кандидатских и докторских диссертаций по специальностям: "Математика" и "Педагогика", принятых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Республики Армения (23.03.2007).

УДК 51
ББК 22.1
М 151 **Математика в высшей школе.**– Ереван: Изд-во ГИУА "Чартарагет", 2014. - Том 10, №1.– 56с.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Адрес редакции: 0009, Ереван, ул. Теряна 105, ГИУА, корпус 12, комната 12202.
Телефон: +(37410) 56-28-82. **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

---

It is included in the accepted by the Highest Certifying Commission of Armenia (HCC) list of periodicals admissible for publications of the results of PhD and Doctoral theses by specialties Mathematics and Pedagogy (23.03.2007).
UDC 51
LBC 22.1
M 151 **Mathematics in Higher School.** - Yerevan: SEUA "Tchartaraget" Publishing House.- 2014.- Volume 10, №1.- 56p.

EDITORIAL COUNCIL

Address: 0009, Yerevan, 105 Teryan, SEUA, bld. 12, room 12202.
Tel: +(37410) 56-28-82, **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

ISSN 1829-3344

ՀՏԴ 514.112.6; 514.174.2

ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐԸ ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ԵՎ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԸՆԴԼԱՅՆՎԱԾ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ա.Հ. Առաքելյան
(Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան)
E-mail: armarakelyan@seua.am

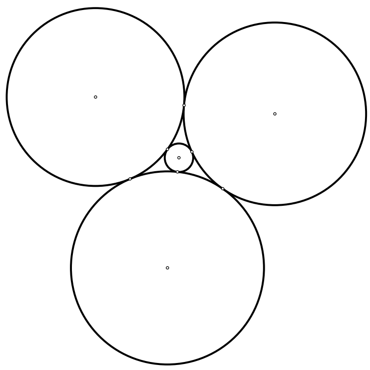
Դիտարկվում է միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի Դեկարտի դասական խնդիրը ընդլայնված էվկլիդյան հարթության վրա: Այդ ներկայացման մի քանի եղանակների հիման վրա տրվում է շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի խիստ մաթեմատիկական սահմանումը, և բերվում են դեկարտյան չհամարվող կոնֆիգուրացիաներ: Ապացուցվում է նաև Դեկարտի դասական խնդրի նմանակը ընդլայնված կոմպլեքս հարթության վրա:

Առանցքային բառեր. շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, ապոլլոնյան փաթեթներ, ընդլայնված էվկլիդյան և կոմպլեքս հարթություն, կողմնորոշված շրջանագիծ, կորություն:

1°. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ: 1643 թ-ին Բոհեմիայի թագուհի Եղիսաբեթին ուղղված իր նամակում Ռ. Դեկարտը նշում է, որ նկ. 1 -ում պատկերված՝ C_i, $i=\overline{1,4}$, չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող շրջանագծերի կորությունների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությանը համարժեք մի առնչություն՝

$$\sum_{i=1}^{4} b_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} b_i\right)^2, \qquad (1)$$

որտեղ $b_i = \dfrac{1}{r_i}$ -ն C_i շրջանագծի կորությունն է [1]:

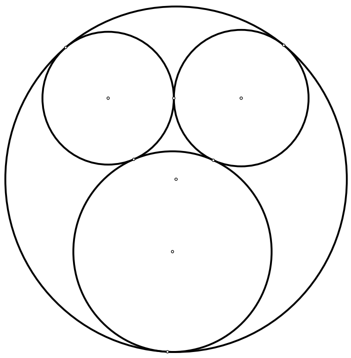


Նկ. 1

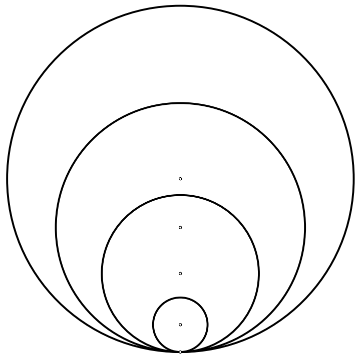
Քանի որ չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող շրջանագծերի հնարավոր դասավորություններըը չեն սահմանափակվում միայն Դեկարտի դիտարկած կոնֆիգուրացիայով (նկ. 2), բնականաբար հարց է առաջանում մնացած տիպի կոնֆիգուրացիաների համար (1) բանաձևի ճշմարտացիության վերաբերյալ:

Բերված օրինակներում առկա ուղիղները անհրաժեշտ է հասկանալ որպես 0 կորությամբ շրջանագծեր: Ուղիղները նման կերպ դիտարկելու համար անհրաժեշտ է էվկլիդյան հարթության փոխարեն դիտարկել $\overline{R}^2$ ընդլանված հարթությունը (երկչափ հարթությանը ավելացված անվերջ հեռու կետը):

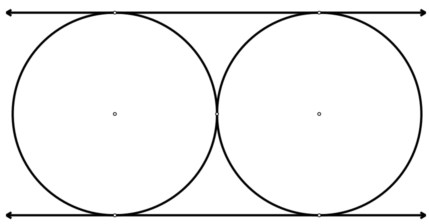
Ընդլայնված հարթությունում ուղիղները կարելի է դիտարկել որպես անվերջ հեռու կետով անցնող շրջանագծեր: Առաջին հայացքից ընդլայնված հարթությունում ուղղի նման սահմանումը բավականին անսովոր է: Սակայն այն դառնում է բնական, եթե սահմանենք զուգահեռ ուղիղները՝ որպես ուղիղներ, որոնք հատվում են անվերջ հեռու կետում:



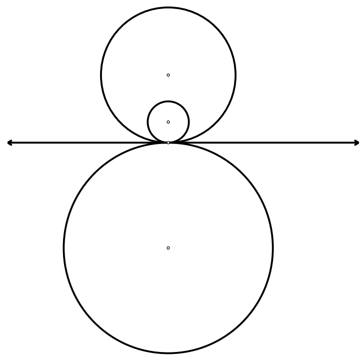
ա



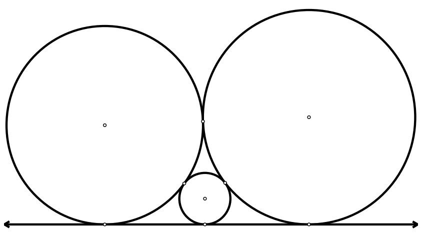
բ



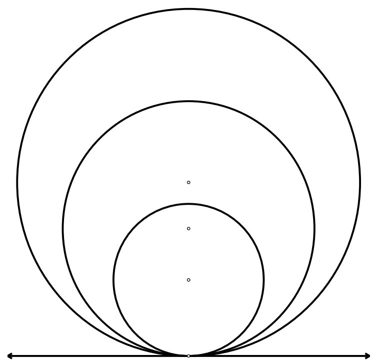
գ



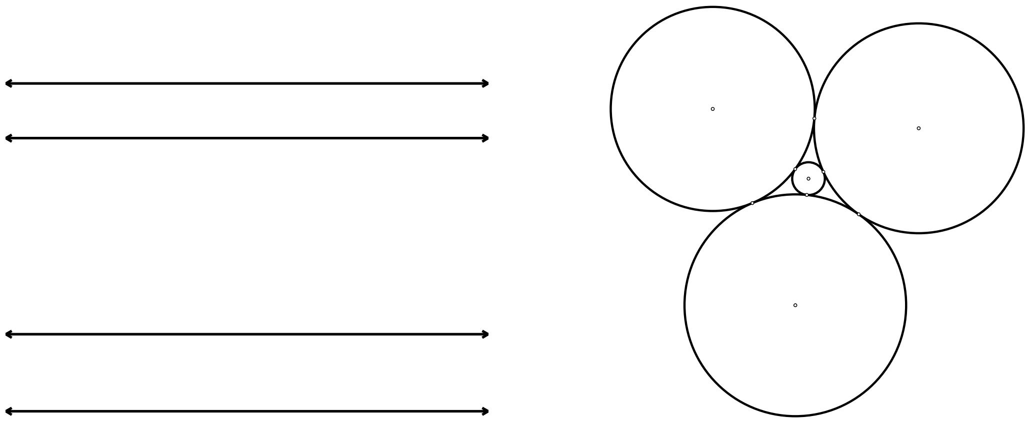
դ



ե



զ



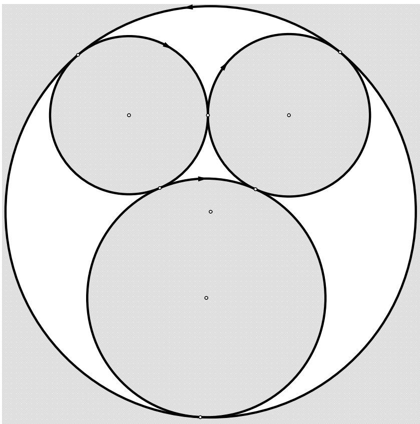
է ը

Նկ. 2

Նշենք, որ 1826 թ-ին Յա. Շտեյները տվել է (1) առնչության լրիվ ապացույցը [2]: Այնուհետև մի շարք հեղինակներ (Կոքստեր [3], Պեդո [4], Սոդի [5]) փորձել են ընդհանրացնել (1) առնչությունը նկ. 2-ում բերված այլ կոնֆիգուրացիաների համար: Մասնավորապես, համաձայն վերոհիշյալ հեղինակների աշխատանքների (1), բանաձևը ճիշտ է նկ. 2-ում բերված “ա”, “գ”, “ե” և “ը” տիպի կոնֆիգուրացիաների դեպքում, եթե միայն շրջանագծերի կորությունների համար սահմանենք որոշակի նշաններ հետևյալ կերպ. եթե կոնֆիգուրացիայում ներառված C_i շրջանագիծը մյուսների հետ ունի միայն արտաքին շոշափում, ապա դրա կորությունը կընդունենք դրական ($b_i = \frac{1}{r_i}$), և բացասական ($b_i = -\frac{1}{r_i}$), եթե այն մյուսների հետ ունի միայն ներքին շոշափում:

2°. ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱ: Դեկարտի թեորեմը ընդհանրացնելու և հետագա շարադրանքն ավելի խիստ մաթեմատիկական հիմքի բերելու համար ներմուծենք կողմնորոշված շրջանագծի գաղափարը. շրջանագիծի փոխարեն դիտարկենք այդ շրջանագծով սահմանափակված *երկչափ շրջանը և/կամ դրա լրացումը այդ հարթության վրա (ընդհանրացված շրջան),* իսկ շրջանագծի կողմնորոշումը կորոշենք ձախ ձեռքի կանոնով:

Բնական է, որ եթե երկու շրջան շոշափում են միմյանց, ապա նրանց ներքին տիրույթները չեն հատվում, իսկ եզրագծերը շոշափող շրջանագծեր են: Այս մոտեցումը կարելի է ներկայացնել ավելի ճշգրիտ տեսքով՝ օգտվելով շրջանների եզրագծերի կողմնորոշումներից: Ընդհանրապես շրջանը ստանում է այն հարթության կողմնորոշումը, որի վրա այն որոշված է, իսկ շրջանի եզրագիծն ունի իր ուրույն կողմնորոշումը, որը որոշվում է ձախ ձեռքի կանոնով: Մասնավորապես, նկ. 2ա-ում պատկերված կոնֆիգուրացիայի համար կառուցված իրար շոշափող շրջանների եզրագծերն ունեն նկ. 3-ում պատկերված կողմնորոշումները:



Նկ. 3

Դիտարկված օրինակում արտաքին շրջանագիծը եզրագծում է իր արտաքին տիրույթը: Հարց է՝ արդյո՞ք հնարավոր չէ դիտարկել միայն սահմանափակ տիրույթները և դրանց եզրագծերը: Պատասխանը բացասական է, քանի որ R^2 հարթությունից ընդլայնված $\overline{R^2}$ հարթությանն անցում կատարելիս սահմանափակ և անսահմանափակ տիրույթների միջև տարբերությունը վերանում է: $\overline{R^2}$ ընդլայլված հարթության ընտրությունը արդարացված է նաև $\overline{R^2}$-ի և S^2 սֆերայի միջև առկա փոխմիարժեքությամբ, որն իրականացվում է ստերեոգրաֆիկ արտապատկերման միջոցով: Նկատենք, որ ստերեոգրաֆիկ արտապատկերման ժամանակ $\overline{R^2}$-ի վրա տրված ընդհանրացված շրջանները S^2-ի վրա վերածվում են սֆերիկ սեգմենտների, որոնք ներառում են սֆերայի հյուսիսային բևեռը: Այսուհետ $\overline{R^2}$-ի վրա շրջան ասելով կհասկանանք և՛ սովորական, և՛ ընդհանրացված շրջանները:

Կասենք, որ $\overline{R^2}$-ի վրա երկու շրջաններ շոշափում են միմյանց, եթե նրանք ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, և այդ կետում նրանց եզրագծերն ունեն "բացասական" շոշափում. շոշափման կետում եզրագծերի կողմնորոշումները հակուղղված են:

Նկատենք, որ $\overline{R^2}$-ի վրա կողմնորոշված շրջանագծերի շոշափման վերոհիշյալ մոտեցման համաձայն՝ չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող շրջանագծերի նկ. 3 -ում պատկերված բոլոր հնարավոր կոնֆիգուրացիաներից "բ", "դ", "զ" և "է" տարբերակները դուրս են մնում, քանի որ այդ տարբերակնորում առկա են "դրական" շոշափումներ:

Մնացած կոնֆիգուրացիաները քննարկելու համար սահմանենք ուղղորդված շրջանագծերի կորության նշանի գաղափարը: Դիցուք՝ ունենք C ուղղորդված շրջանագիծ r շառավղով $\overline{R^2}$ ընդլայլված հարթության վրա: Այդ դեպքում C

ուղղորդված շրջանագիծն ունի $\dfrac{1}{r}$ դրական կորություն այն դեպքում, եթե այն ձախ ձեռքի կանոնով սահմանափակում է սովորական շրջան: Հակառակ դեպքում C ուղղորդված շրջանագիծը սահմանվում է $-\dfrac{1}{r}$ բացասական կորությամբ և սահմանափակում է ընդհանրացված շրջանը: Ուղիղը ընդունվում է որպես 0 կորությամբ շրջանագիծ:

Այս իմաստով սահմանված կորության դեպքում Դեկարտի (1) առնչությունը ճիշտ է շրջանագծերի նկ. 3-ի "ա", "գ", "ե" և "ը" կոնֆիգուրացիաների համար, որոնք էլ կանվանենք *շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ*:

Հարց է առաջանում. արդյո՞ք Դեկարտի առնչության ցանկացած լուծում որոշում է որևէ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա:

ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ 1: Դիցուք b_i, $i=\overline{1,4}$ թվերը (1) հավասարման լուծումներն են: Նկատենք, որ այդ դեպքում $-b_i$, $i=\overline{1,4}$ թվերը նույնպես (1) հավասարման լուծումներ են: Ներկայացնենք (1) հավասարումը հետևյալ կերպ՝

$$2\left(b_1+b_2\right)\left(b_3+b_4\right)=\left(b_1-b_2\right)^2+\left(b_3-b_4\right)^2 :$$

Այստեղից հետևում է, որ կամ $b_1+b_2\geq 0$ և $b_3+b_4\geq 0$, կամ $b_1+b_2\leq 0$ և $b_3+b_4\leq 0$: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $b_1\geq b_2\geq b_3\geq b_4$: Այսպիսով առաջին դեպքում $\left|b_4\right|\leq b_3\leq b_2\leq b_1$, իսկ երկրորդ դեպքում $b_4\leq b_3\leq b_2\leq -\left|b_1\right|$: Հետևաբար, եթե b_i, $i=\overline{1,4}$ թվերը բավարարում են վերը նշված անհավասարումներից մեկին, ապա $-b_i$, $i=\overline{1,4}$ թվերը կհամապատասխանեն մյուսին: Բայց նկատենք, որ $b_4\leq b_3\leq b_2\leq -\left|b_1\right|$ անհավասարմամբ որոշված կոնֆիգուրացիան դեկարտյան չէ, քանի որ բոլոր շրջանագծերը երիզում են շրջանների լրացումներ, որոնք չեն կարող չհատվել:

Արդյունքում ստացվում է, որ կորության վերը տրված սահմանումով Դեկարտի (1) առնչության լուծումներից միայն $\left|b_4\right|\leq b_3\leq b_2\leq b_1$ անհավասարմանը բավարարող լուծումն է որոշում դեկարտյան կոնֆիգուրացիա: Օգտվելով այս անհավասարումից հնարավոր է տալ դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի երկրաչափական սահմանումը:

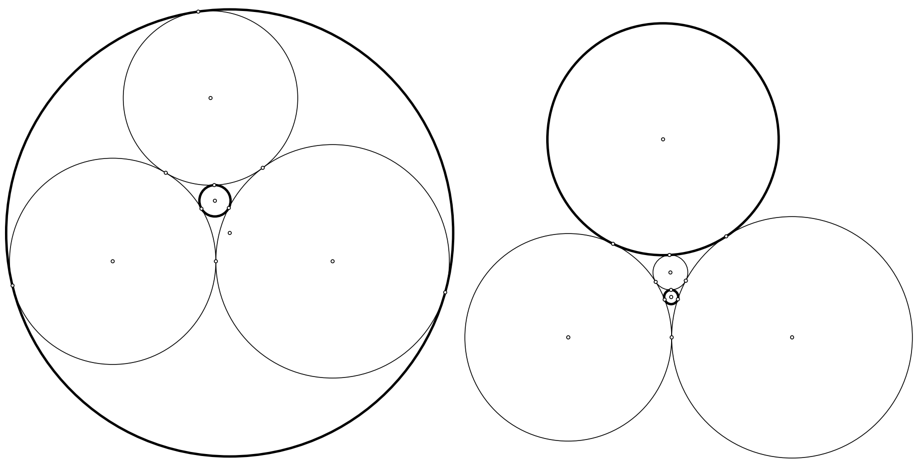
ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող, ուղղորդված շրջանագծերի կոնֆիգուրացիան դեկարտյան է, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմաններից գոնե մեկը՝

- բոլոր շրջանագծերի կորությունները դրական են,
- շրջանագծերից երեքի կորությունները դրական են, իսկ չորրորդի բացասական կորությունը բացարձակ արժեքով փոքր է մնացածից,

- շրջանագծերից երեքի կորությունները դրական են, իսկ չորրորդինը զրո է,
- շրջանագծերից երկուսի կորությունները դրական են և հավասար, իսկ երկուսինը զրո է:

Կարելի է ցույց է տալ, որ (1) բանաձևը ճիշտ է այս սահմանմանը բավարարող բոլոր դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների դեպքում:

3°. ԴԵԿԱՐՏԻ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹԵՈՐԵՄԸ: Տրված երեք շրջանագծերի համար գոյություն ունեն միայն երկու շրջանագիծեր, որոնք շոշափում են երեքին էլ՝ կազմելով դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, ընդ որում՝ այդ շրջանագծերից գոնե մեկն ունի դրական կորություն (նկ. 4):

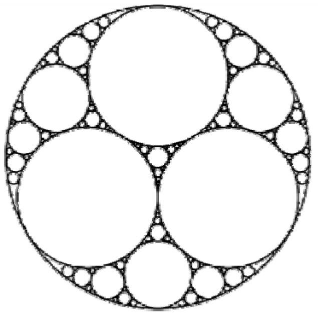


Նկ. 4

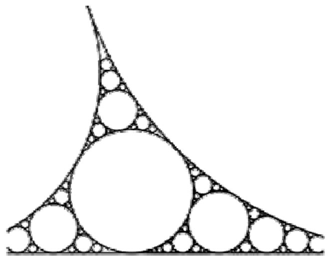
Նշանակենք այդ կորությունները b_4 և b_4' : Այս պնդումը ակնհայտորեն հետևում է (1) քառակուսային հավասարումը b_4 -ի նկատմամբ լուծելուց՝

$$b_4 + b_4' = 2\left(b_1 + b_2 + b_3\right): \qquad (2)$$

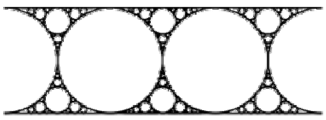
Ստացված բանաձևով հնարավոր է տրված դեկարտյան կոնֆիգուրացիայից ստանալ մեկ ուրիշ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա՝ շրջանագծերից մեկը փոխարինելով նրա համապատասխան զույգով: Այդ փոխարինումները կարելի է անվերջ շարունակել, որի արդյունքում ստացվում են միմյանց փոխադարձաբար շոշափող շրջանագծերի անվերջ շղթաներ, որոնք կոչվում են ապոլոնյան փաթեթներ [6]: Կախված սկզբնական Դեկարտյան կոնֆիգուրացիայից՝ ապոլոնյան փաթեթը կամ գտնվում է այդ կոնֆիգուրացիայի շրջանագծի ներսում, կամ տարածվում է երկու զուգահեռ ուղիղների միջև, կամ լրացնում է կիսահարթությունը, կամ ամբողջ հարթությունը (նկ. 5):



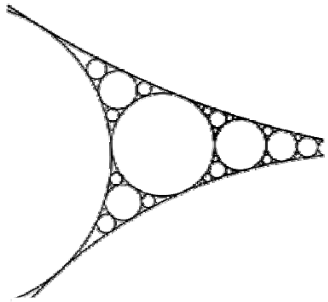
ա. Սահմանափակ



բ. Կիսահարթություն



գ. Ժապավեն



դ. Անսահմանափակ

Նկ. 5

Քանի որ ապոլոնյան փաթեթը սահմանվում է՝ ելնելով դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի չորրորդ շրջանագծի որոշումից, ուստի այն կարելի է ամբողջովին վերականգնել, եթե տրված են երեք միմյանց փոխադարձաբար շոշափող շրջանագծեր:

Ելնելով նկ. 2ա-ի հիման վրա ապոլոնյան փաթեթի կառուցման ժամանակ նկատված փորձնական տվյալներից, կարելի է ցույց տալ, որ, եթե սկզբնական շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է $(0,0)$ կետում, ապա փաթեթի բոլոր շրջանագծերի կենտրոնները ռացիոնալ են: Ավելին, եթե փաթեթի շրջանագիծն ունի b կորություն և կենտրոն (x,y) կետում, ապա bx-ը և by-ը միշտ ամբողջ թվեր են:

Ստացված արդյունքների հիման վրա ածխատանքումն ապացուցվում է Դեկարտի թեորեմի (թեորեմ 2) ընդհանրացումը, որտեղ i-րդ շրջանագծի կենտրոնը ներկայացված է $z_i = x_i + iy_i$ կոմպլեքս թվի տեսքով:

ԹԵՈՐԵՄ 2 (ԴԵԿԱՐՏԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹԵՈՐԵՄ): Դիցուք՝ տրված է կամայական $C_1C_2C_3C_4$ դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, որտեղ i-րդ շրջանագիծը՝ $i=\overline{1,4}$, ունի b_i

կորություն և $z_i = x_i + iy_i$ կենտրոն: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\sum_{i=1}^{4}\left(b_i z_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} b_i z_i\right)^2, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j\left(b_j z_j\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{4} b_j\right)\left(\sum_{j=1}^{4} b_j z_j\right): \qquad (4)$$

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Քանի, որ C_1, C_2, C_3, C_4 շրջանագծերը կազմում են դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, ապա (1) առնչության համաձայն՝

$$b_4 = b_1 + b_2 + b_3 + 2f(b_1, b_2, b_3),$$

որտեղ $f(b_1, b_2, b_3) \triangleq \pm\sqrt{b_1 b_2 + b_1 b_2 + b_1 b_3}$ [1]:

Նախ՝ ենթադրենք, որ $b_1 b_2 b_3 b_4 \neq 0$, C_1-ի կենտրոնը տեղադրված է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ $z_2 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_1 b_2}$ իրական է: Այդ դեպքում պարզ է, որ

$z_3 = \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)e^{i\varphi}$, որտեղ

$$\cos\varphi = \frac{(1/b_1 + 1/b_2)^2 + (1/b_1 + 1/b_3)^2 - (1/b_2 + 1/b_3)^2}{2\cdot(1/b_1 + 1/b_2)(1/b_1 + 1/b_3)} =$$

$$= \frac{b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - b_1^2}{(b_1 + b_2)(b_1 + b_3)} = \frac{f^2(b_1, b_2, b_3) - b_1^2}{f^2(b_1, b_2, b_3) + b_1^2},$$

հետևաբար՝ $\sin\varphi = \frac{2b_1 f(b_1, b_2, b_3)}{f^2(b_1, b_2, b_3) + b_1^2}$ և $b_3 z_3 = \frac{(f(b_1, b_2, b_3) + ib_1)^2}{b_1(b_2 + b_2)}$:

Նույն եղանակով կստանք՝ $b_4 z_4 = \frac{(f(b_1, b_2, b_4) + ib_1)^2}{b_1(b_1 + b_2)}$:

Քանի, որ $f(b_1, b_2, b_4) = b_1 + b_2 + f(b_1, b_2, b_3)$, ապա՝

$$b_1(b_1 + b_2)\{b_1 z_1, b_2 z_2, b_3 z_3, b_4 z_4\} = \{0, (b_1 + b_2)^2, (f(b_1, b_2, b_3) + ib_1)^2, (f(b_1, b_2, b_4) + ib_1)^2\} =$$

$$= \{0, A^2, B^2, (A+B)^2\},$$

որտեղ $A = b_1 + b_2$ և $B = f(b_1, b_2, b_3) + ib_1$: Հաշվի առնելով

$$2(A^4 + B^4 + (A+B)^4) = (A^2 + B^2 + (A+B)^2)^2$$

---

[1] $f(b_1, b_2, b_3)$ մեծությունը կընդունենք դրական, եթե C_4 շրջանագիծը կոնֆիգուրացիայում ամենամեծն է, և բացասական՝ հակառակ դեպքում:

նույնությունը, կստանանք թեորեմի պնդման ապացույցը:

Այժմ, եթե շրջանագծերը գտնվում են կամայական դիրքերում, ապա դրանց կենտրոնները կարող ենք ներկայացնել

$$Z_1 = z_0 + wz_1, Z_2 = z_0 + wz_2, Z_3 = z_0 + wz_3, Z_4 = z_0 + wz_4$$

տեսքով, որտեղ $z_1 = 0$, z_2-ը իրական է, իսկ $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$: Վերջիններս տեղադրելով (3)-ի ձախ մասում և կատարելով որոշ պարզ ձևափոխություններ՝ կստանանք թեորեմի պնդման ապացույցն ընդհանուր դեպքում:

Լուծելով (10) հավասարումը $b_4 z_z$-ի նկատմամբ՝ կարելի է ստանալ (9) բանաձևի նմանակը՝

$$b_4 z_4 + b_4' z_4' = 2\left(b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3\right): \qquad (5)$$

Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս պարզ հանրահաշվական գործողությունների միջոցով գտնել որոնելի շրջանագծի կենտրոնը կամ կորությունը, եթե հայտնի է դրանցից մեկը: Իր պարզության շնորհիվ (5) բանաձևը լայնորեն կիրառվում է դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համակարգչային մոդելների կառուցման ժամանակ:

Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմը ստանում է ավելի գեղեցիկ տեսք, երբ ներկայացվում է մատրիցների միջոցով: Դիտարկենք Դեկարտի (1) թեորեմի հիման վրա կառուցված քառակուսային տեսքը՝

$$Q_2\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) := x^T Q_2 x = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2:$$

Նշանակելով 1_4-ով 1×4-չափանի 1-երից բաղկացած մատրիցը, Q_2-ի համար կարելի է ստանալ հետևյալ մատրիցային ներկայացումը՝

$$Q_2 = I_4 - \frac{1}{2} 1_4 1_4^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

որտեղ Q-ի ինդեքսը ցույց է տալիս դիտարկվող տարածության չափը:

Ելնելով այս նշանակումներից՝ Դեկարտի (1) հավասարմումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$b^T Q_2 b = 0,$$

որտեղ $b = \left(b_1, b_2, b_3, b_4\right)^T$-ն դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կորությունների վեկտորն է: Համանմանորեն Դեկարտի կոմպլեքս թեորեմի (3) առնչությունը կարելի է ներկայացնել

$$c^T Q_2 c = 0$$

տեսքով, որտեղ $c=\left(b_1z_1,b_2z_2,b_3z_3,b_4z_4\right)^T$ -ն դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի համապատասխան կենտրոնների և կորությունների արտադրյալների վեկտորն է:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Descartes R. *Oeuvres de Descartes, Correspondance IV* /C. Adam and P. Tannery, Eds.- Paris: Leopold Cerf, 1901.
2. Steiner J. *Einige geometrische Betrachtungen*//J. reine Angew. Math.- 1826.-1.- P.161–184 and 252–288 (Also: Steiner J., *Gesammelte Werke.*-Vol. I.- Reimer: Berlin, 1881.- P.17–76.
3. Coxeter H. M. *The problem of Apollonius*//Amer. Math. Monthly.- 1968.-75.-P. 5–15.
4. Pedoe D. *On a theorem in geometry*//Amer. Math. Monthly.- 1967.-74.-P.627–640.
5. Soddy F. *The Kiss Precise*//*Nature*.-June 20, 1936.-P. 1021.
6. Hirst K.E. *The Apollonian packing of circles*//J. Lond. Math. Soc.- 1967.-42.-P. 281–291.

Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 09.04.2014:

КОНФИГУРАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ ДЕКАРТА В РАСШИРЕННЫХ ЕВКЛИДОВОЙ И КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТЯХ

А.Г. Аракелян

В расширенной евклидовой плоскости рассматривается классическая задача Декарта о четырех попарно касающихся окружностях. На основе различных конфигураций данной задачи вводится строгое математическое определение декартовой конфигурации окружностей и приводятся некоторые примеры недекартовых конфигураций. Также доказывается аналог классической теоремы Декарта в расширенной комплексной плоскости.

Ключевые слова: декартова конфигурация окружностей, аполлониевы упаковки, расширенные евклидова и комплексная плоскости, ориентированная окружность, кривизна.

DESCARTES' CIRCLE THEOREM IN EXTENDED EUCLIDEAN AND COMPLEX PLANES

A.H. Arakelyan

Decartes' classical problem of four mutually tangent circles is considered in the extended Euclidean plane. On the basis of all the possible arrangements of such configurations the strict mathematical definition of Descartes circle configuration is given. With this definition several examples of non Decartes configurations are given. We show that similar relations hold involving the centers of the four circles in such a configuration, coordinatized as complex numbers, yielding a complex Descartes Theorem.

Keywords: Decartes circle configuration, Apollonian packings, extended Euclidean and complex planes, oriented circle, curvature.

УДК 517. 948

КРИТЕРИЙ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.А. Епископосян

(Государственный инженерный университет Армении (Политехник))

E-mail: sergoep@ysu.am

Рассматриваются непрерывные отображения метрических пространств. Доказывается критерий универсальности, который играет важную роль в теории хаоса и динамических систем.

Ключевые слова: универсальная функция, топологическая транзитивность, критерий универсальности.

1°. Введение. В теории хаоса и, в частности, в теории динамических систем одним из важнейших объектов изучения являются понятия универсального элемента и топологические транзитивные отображения. Более подробно о теории хаоса можно найти в [1]. Формулируются эти понятия следующим образом (см. [1], стр.23).

Пусть X и Y - некоторые метрический пространства, а $T_n : X \to Y$, $n \in \Lambda \subset N_0$ - некоторые непрерывные отображения.

Определение 1 (Универсальный элемент). *Допустим, что элемент* $x_0 \in X$ *универсален в* Y *относительно* T_n, *если множество* $\{T_n x : n \in \Lambda\}$ *всюду плотно в* Y, *т.е. для любого открытого множества* $V \subset Y$ *существует* $n_0 \in N$ *такое, что* $T_{n_0}(x_0) \in V$, *или, используя понятие метрики, для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $y \in Y$ *существует последовательность* $n_k \subset \Lambda$ *такая, что* $\rho_Y(T_{n_k}(x_0), y) < \varepsilon$ *при* $k > k_0$.

Определение 2 (Топологическая транзитивность). *Пусть* $T_n : X \to Y$ *непрерывное отображение между метрическими пространствами* X *и* Y. *Тогда* T_n *называется топологически транзитивным, если для любых непустых, открытых множеств* $U \subset X$ *и* $V \subset Y$ *существует некоторое число* $n \geq 0$ *такое, что*

$$T_n(U) \cap V \neq \varnothing,$$

т.е. для любых $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $y \in Y$ существуют $x_0 \in X$ и $n \in N$ такие, что

$$\rho_X(x, x_0) < \varepsilon, \ \ \rho_Y\left(T_n(x_0), y\right) < \varepsilon.$$

Первый тип универсальности был рассмотрен еще в 1914 г. М. Факетом [2]. Он, в частности, доказал:

Теорема (М. Факет). *Существует вещественный степенной ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in [-1,1],$$

который не только расходится в каждой точке $x \neq 0$, но делает это наихудшим способом, а именно, для любой функции $g(x)$, непрерывной на $[-1,1]$ с $g(0) = 0$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что последовательность частичных сумм $S_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ при $k \to \infty$.

Пример универсального степенного ряда (или ряда Тейлора) Факета, по сути, имеет два аспекта: первый - это максимальная расходимость и второй - существование одного элемента, который позволяет приблизить максимальный класс объектов. Это, по сути, и означает универсальность.

Далее, по сути, первый тип универсальной функции был рассмотрен еще в 1929 г. М. Дж. Биркхофом [3]. Он, в частности, доказал следующую теорему:

Теорема (Дж. Биркхоф). *Существует целая функция $f(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т.е. для любой целой функции $g(z)$ существует последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $a_n \to \infty$ такая, что*

$$f(z + a_n) \to g(z) \quad \text{локально равномерно в } C.$$

В 1935 г. Ж. Марцинкевич [4] не только доказал существование, как он назвал, "универсальной первообразной", но и был первым, который применил слово "**универсальная**" в этом контексте и показал, что множество универсальных элементов является остаточным в смысле Бэра, т.е. подмножество в пространстве Бэра, представимое как пересечение счётного числа открытых всюду плотных множеств. А именно, он доказал следующий результат:

Теорема (Ж. Марцинкевич). *Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность вещественных чисел с $h_n \to 0$. Тогда существует непрерывная функция $f(x) \in C[0,1]$ такая, что для любой функции $g(x)$, измеримой на $[0,1]$, можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что*

$$f(x + h_{n_k}) - f(x)h_{n_k} \to g(x) \quad \text{п.в. на } [0,1],$$

при этом множество таких функций $f(x)$ является остаточным в $C[0,1]$.

В 1952 г. Дж. Маклейн [5] доказал следующий результат:

Теорема (Дж. Маклейн). *Существует целая функция $f(z) \in C(H)$, обладающая универсальными производными, т.е. для любой целой функции $g(z) \in C(H)$ можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что производные соответствующим порядком локально равномерно сходятся к $g(z)$ в $C(H)$, т.е.*

$$f^{(n_k)}(z) \to g(z) \text{ при } k \to \infty.$$

Далее, обозначим множество универсальных элементов для некоторого класса через U (в частности, приведенные выше). Наиболее естественная проблема, когда некоторое семейство отображений обладает универсальным элементом, пока еще не решена. С другой стороны, многие результаты, полученные в этом направлении, показывают, что множество универсальных элементов U или пустое, или очень большое, а именно, остаточное в смысле категории Бэра (содержащее плотное G_δ - подмножество).

В теории хаоса фундаментальным является теорема транзитивности Дж. Биркхофа [3]. Перенеся этот результат на абстрактную теорию универсальных рядов, в 1987г. К.-Г. Гроссе-Эрдман сформулировал так называемый принцип универсальности [6], который, по сути, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство отображений обладало универсальным элементом.

Формулируется этот принцип следующим образом:

Теорема (Принцип Универсальности). *Пусть X-полное метрическое пространство, Y - сепарабельное метрическое пространство, а $T_n : X \to Y$, $n \in \Lambda \subset N_0$ - некоторое непрерывное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Множество U универсальных элементов является остаточным в X.

(ii) Множество U универсальных элементов плотно в X.

(iii) $\{T_n\}_{n\in\Lambda}$ топологически транзитивно для пары (X,Y).

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек U является плотным G_δ подмножеством X.

2°. Доказательство основных лемм

Лемма 1. *Пусть X - полное метрическое пространство, а $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ - счетное число открытых, плотных в X множеств. Тогда множество $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ плотно в пространстве X.*

Доказательство. Учитывая определения плотности множества, достаточно показать, что для любого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap U = \mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \neq \varnothing,$$

где $\mathsf{B}(x,\varepsilon)$ - открытый шар с центром в точке x и с диаметром ε, т.е.

$$\mathsf{B}(x,\varepsilon) = \{\tilde{x} \in \mathsf{X} : \rho(x,\tilde{x}) < \varepsilon\}.$$

Так как $\mathsf{B}(x,\varepsilon)$ - открытое множество, а U_1 - открытое и плотное в X множество, то

$$\mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap U_1 \neq \varnothing,$$

и, следовательно, существует точка $x_1 \in \mathsf{B}(x,\varepsilon)$ такая, что можно найти закрытый шар K_1, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{K}_1 = \overline{\mathsf{B}(x_1, r_1)} \subset \mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap U_1,$$

где $0 < r_1 < 12$. Так как $\mathsf{B}(x_1, r_1)$ - открытое множество, а U_2 - открытое и плотное в X множество, то

$$\mathsf{B}(x_1, r_1) \cap U_2 \neq \varnothing,$$

и, следовательно, существует точка $x_2 \in \mathsf{B}(x_1, r_1)$ такая, что можно найти закрытый шар K_2, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{K}_2 = \overline{\mathsf{B}(x_2, r_2)} \subset \mathsf{B}(x_1, r_1) \cap U_2,$$

где $0 < r_2 < \dfrac{1}{2^2}$.

Продолжая этот процесс, получим, что для любого целого числа $j \geq 2$ существует точка $x_j \in \mathsf{B}(x_{j-1}, r_{j-1})$ такая, что можно найти закрытый шар K_j, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{K}_j = \overline{\mathsf{B}(x_j, r_j)} \subset \mathsf{B}(x_{j-1}, r_{j-1}) \cap U_j, \qquad (1)$$

где $0 < r_j < \dfrac{1}{2^j}$. Таким образом, получим

$$\mathsf{B}(x,\varepsilon) \supset \mathsf{K}_1 \supset \mathsf{K}_j \supset \ldots \supset \mathsf{K}_j \supset, \;\; diam \mathsf{K}_j \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Теперь, если m и n - любые натуральные числа такие, что $m > N$ и $n > N$ для некоторого натурального N, то из построения последовательности шаров $\left\{ \mathsf{B}(x_j, r_j) \right\}_{j=1}^{\infty}$ (см. (1)) следует, что $x_n, x_m \in \mathsf{B}(x_N, r_N)$ и, следовательно, $\rho(x_n, x_m) < 2r_n < \dfrac{1}{2^{N-1}}$, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в X. А так как X - полное метрическое пространство, то существует точка $x^* \in X$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Таким образом, получаем, что $x^* \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} K_j$. Учитывая построение последовательности закрытых множеств k_j (1), имеем $x^* \in K_j \subset \mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap U_j$ для всех $j \geq 1$ и, следовательно, $x^* \in \mathsf{B}(x,\varepsilon) \cap \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} U_j$. Полученное означает, что множество

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$$

плотно в пространстве X, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть* X *- полное метрическое пространство, а* $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ *- счетное число плотных* G_δ *множеств в* X. *Тогда множество* $G=\bigcap_{j=1}^{\infty} G_i$ *- плотное* G_δ *множество в пространстве* X.

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ - счетное число плотных G_δ множеств в X. Тогда, согласно определению G_δ множества, имеем $G_i=\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^i$, где множества U_k^i открытые и плотные в X.

Нетрудно видеть, что

$$G=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^i=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

где U_n - некоторый набор множеств U_k^i. Так как множества $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ - открытые, плотные в X множества, то из Леммы 1 следует, что множество G также является плотным в X множеством. С другой стороны, $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где открытые множества, т.е. множество G, является плотным G_δ множеством в X.

3°. Доказательство Теоремы

Сперва покажем, что $(ii)\Rightarrow(i)$. Допустим, что существует множество элементов

$$U=\{x\in X:\{T_nx:n\in N\},\ \text{плотн в } Y\},\tag{2}$$

которое плотно в X, и пусть $U\in X$, $V\in Y$ - любые открытые, непустые множества. Поскольку множество U плотно в X, то $\mathrm{U}\cap U\neq\varnothing$, следовательно, существует точка $x_0\in\mathrm{U}$ такая, что $x_0\in U$. С другой стороны, согласно (2), существует натуральное число k такое, что $T_kx_0\in V$. Отсюда следует, что $x_0\in\mathrm{T}_k(U)\cap V$, т.е. $\mathrm{T}_k(U)\cap V\neq\varnothing$, и, следовательно, T_n топологически транзитивно для (X,Y) (см. Определение 1.1.3), т.е. имеет место утверждение **(i)**.

Теперь покажем, что $(i)\Rightarrow(ii)$.

Допустим, имеет место утверждение (i), т.е. T_n топологически транзитивно для (X,Y). Следовательно, согласно Определению 1.1.3, для любых непустых, открытых множеств $U\subset X$ и $V\subset Y$ существует некоторое число $n\geq 0$ такое, что $T_n(U)\cap V\neq\varnothing$. Отсюда, в частности, следует, что для любого открытого множества $U\subset X$ имеем $U\cap T_n^{(-)}(V)\neq\varnothing$, где

$$T_n^{(-)}(V)=\left\{\ x\in X:\ T_nx\in V\ \right\}\tag{3}$$

- прообраз множества V относительно T_n.

Отсюда, в частности, следует, что для любого открытого множества $U\subset X$ имеем

$$U \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s^{(-)}(V) \neq \varnothing,$$

т.е. множество $\Theta^{(-)}(V) = \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathsf{T}_s^{(-)}(V)$ плотно в X.

С другой стороны, множество $\Theta^{(-)}(V)$ открытое. В самом деле, пусть дана любая точка $x_0 \in \mathsf{T}_n^{(-)}(V)$. Тогда $y_0 = T_n x_0 \in V$. Поскольку T_n - непрерывное отображение, то для любой окружности $\mathsf{B}_\varepsilon(y_0) \subset V$ существует окружность $\mathsf{B}_\delta(x_0)$ такая, что $T_n\left(\mathsf{B}_\delta(x_0)\right) \subset \mathsf{B}_\varepsilon(y_0)$. Следовательно, $T_n\left(\mathsf{B}_\delta(x_0)\right) \subset V$. Таким образом, для любой точки $x \in \mathsf{B}_\delta(x_0)$ имеем $T_n x \in V$, т.е. $x \in T_n^{(-)}(V)$. Отсюда следует, что множество $T_n^{(-)}(V)$ открытое, и, следовательно, множество $\Theta^{(-)}(V)$ также открытое.

Таким образом, для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $\Theta^{(-)}(V)$ открытое и плотное в $U \subset X$. Далее, возьмем счетный базис открытых множеств $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, $V_j \subset Y$ со свойством: для любого открытого множества $V \subset Y$ существует $j \geq 1$ такое, что $V_j \subset V$. Согласно доказанному выше, множества $\{\Theta^{(-)}(V_j)\}_{j=1}^{\infty}$ открытые и плотные в X. Применяя Лемму 2, получим, что множество $\Omega = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Theta^{(-)}(V_j)$ также плотно в X. Возьмем любую точку $x_0 \in \Omega$. Тогда имеем $x_0 \in \Theta^{(-)}(V_j) = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s^{(-)}(V_j)$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Отсюда и из (3) следует, что для любого $j \geq 1$ существует $s \geq 1$ такое, что $T_s x_0 \in V_j$.

Следовательно,

$$V_j \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s x_0 \neq \varnothing, \quad j \geq 1. \tag{4}$$

Теперь, пусть дано любое открытое множество $V \subset Y$. Тогда существует V_j такое, что $V_j \subset V$. Отсюда и из (4) следует, что $V \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s x_0 \neq \varnothing$, т.е. множество $\bigcup_{s=1}^{\infty} T_s x_0$ плотно в Y.

Таким образом, множество $\{\ T_n x_0 : n \in N\ \}$ плотно в Y, т.е. точка x_0 универсальна в Y, и, следовательно, $x_0 \in \mathrm{U}$. С другой стороны, множество Ω является пересечением счетного числа открытых, плотных в U множеств, следовательно, Ω - плотное G_δ множество. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grosse-Erdmann K.G. Manguillot A.P. *Linear Chaos*.- Springer, 2011.
2. Pa'l J. *Zwei kleine Bemerkungen* // Thohoku Math. J.-1914.- Vol..- P. 42-43.
3. Birkhoff G.D. *De'monstration d'un the'ore`me e'le'mentaire sur les fonctions enti`e res* // C. R. Acad. Sci.- Paris, 1929.- 189.- P. 473-475.
4. Marcinkiewicz J. *Sur les nombres de'rive's* // Fund. Math.- 1935.- Vol. 24.- P. 305-308.
5. MacLane G.R. *Sequences of derivatives and normal families*//J. Analyse Math.- 1952.- Vol.2.- P. 2–87.
6. Grosse-Erdmann K.G. *Holomorphe Monster und universelle Funktionen* // Mitt. Math. Sem. Giessen.- 1987.- Vol. 176.- P. 1 - 81 .

Материал поступил в редакцию 14.03.2014.

ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ս.Ա. Եպիսկոպոսյան

Ուսումնասիրվում են մետրիկական տարածությունների միջև գործող անընդհատ արտապատկերումներ, և ապացուցվել է ունիվերսալության սկզբունքը, որը կարևոր դեր է կատարում դինամիկ համակարգերի և քաոսի տեսության մեջ:

Առանցքային բառեր. ունիվերսալ ֆունկցիա, տոպոլոգիական տրանզիտիվություն, ունիվերսալության սկզբունք:

THE UNIVERSALITY CRITERION FOR CONTINUOUS MAPPING

S.A. Episkopposyan

Continuous mappings of metric spaces are considered and a criterion of universality, which plays an important role in the theory of dynamical systems and chaos is proved.

***Keywords*:** universal function, topological transitivity, criterion of universality.

УДК **517.968**

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ ГАММЕРШТЕЙНА[1]

М.Ф. Броян
(Национальный аграрный университет Армении)
E-mail: Broyan@rambler.ru

Исследуется система нелинейных интегральных уравнений на полуоси с некомпактным интегральным оператором Гаммерштейна, ядро которого является вполне монотонной функцией и удовлетворяет условию критичности. Путем некоторых априорных оценок с помощью специально выбранных итераций доказывается существование покомпонентно положительного решения указанной системы в определенном весовом пространстве.

Ключевые слова: оператор Гаммерштейна, итерации, монотонность, условие Каратеодори, сходимость.

1°. Введение. Системами нелинейных интегральных уравнений вида

$$f_i(x) = \int_0^\infty K_i(x-t) G_i(t, f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) dt,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in R^+ \equiv [0, +\infty) \tag{1}$$

(относительно искомой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$) описывается ряд задач, имеющих непосредственное применение в самых различных областях современного математического естествознания. В частности, системы вида (1) встречаются в теории переноса излучения в неоднородных средах, в кинетической теории газов, в теории нелинейных систем Риккера для бегущих волн (см. [1-4]).

В случае, когда $n = 2$, а $G_i(t, z_1, z_2) = z_i e^{u_i - z_i - v_i z_{3-i}}$,

$$K_i(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d_i}} e^{-\frac{x^2}{4d_i}}, \quad u_i, d_i, v_i > 0, \ i = 1, 2,$$

система (1) была исследована в недавней работе [4] китайских математиков.

Что касается вопросов разрешимости для соответствующего скалярного уравнения, то в этом направлении имеется немало работ местных и зарубежных математиков (см. [5-12]).

В настоящей работе с применением некоторых априорных оценок с помощью специальных итерационных методов доказывается существование покомпонентно положительного решения системы (1) в определенном весовом пространстве. В конце

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта №SCS 13YR-1A0003

работы приводится пример функций $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^{n}$, для которых выполняются все условия сформулированной теоремы.

2°. Вспомогательные факты и формулировка основного результата. Будем предполагать, что ядра $K_i(x)$ допускают следующие представления:

$$K_i(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_i(s), \;\; x \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

и удовлетворяют условию критичности:

$$\alpha_i \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K_i(x) dx = 2\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_i(s) > 1, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где функции $\left\{\sigma_i(s)\right\}_{i=1}^{n}$ монотонно не убывают и непрерывны на $\left[a, b\right)$, причем $0 < a < b \le +\infty$.

Введем последовательность следующих функций:

$$K_i^{\varepsilon}(x) = K_i(x) e^{\varepsilon x} \;\; , \quad \varepsilon \in [0, a), \quad i = 1, 2, \ldots, n \;\; , \quad x \in R. \tag{4}$$

В силу представления (2), будем иметь

$$K_i^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b e^{-x(s-\varepsilon)} d\sigma_i(s), \;\; x \ge 0, \\ \displaystyle\int_a^b e^{x(s+\varepsilon)} d\sigma_i(s), \;\; x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из $\varepsilon \in [0, a)$ следует, что $K_i^{\varepsilon}(x) \in L_1\left(-\infty, +\infty\right)$.

Рассмотрим следующие функции:

$$\rho_i(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{0} K_i^{\varepsilon}(x) dx = \int_a^b \frac{1}{s+\varepsilon} d\sigma_i(s), \quad \varepsilon \in \left[0, a\right), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Из представления (6) с учетом свойств функций $\left\{\sigma_i(s)\right\}_{i=1}^{n}$ можем утверждать, что

$$\rho_i \in C\left[0, a\right), \; \rho_i(0) = \frac{\alpha_i}{2} > \frac{1}{2}, \; \rho_i(\varepsilon) \downarrow \text{ по } \varepsilon \text{ на } \left[0, a\right). \tag{7}$$

Следовательно, по теореме Коши существуют числа $\varepsilon_i \in \left(0, a\right)$ такие, что

$$\rho_i(\varepsilon_i) \ge \frac{1}{2}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Зафиксируем эти числа. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть последовательность функции* $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^{n}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) при каждом фиксированном $t \in R^+$ *функции* $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^{n}$ *монотонно возрастают по* z_j *на* $[e^{-\varepsilon_j t}, +\infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

2) выполняются следующие неравенства:

$$G_i(t, e^{-\varepsilon_1 t}, e^{-\varepsilon_2 t}, \ldots, e^{-\varepsilon_n t}) \geq 2e^{-\varepsilon_i t}, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \leq \frac{z_i}{\alpha_i} + \beta_{\varepsilon_i}(t),\ z_i \geq e^{-\varepsilon_i t}, t \in R^+$$

для некоторых суммируемых на R^+ *функций* $\left\{\beta_{\varepsilon_i}(t)\right\}_{i=1}^n$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\beta_{\varepsilon_i}(t) \geq 2e^{-\varepsilon_i t}, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \quad t \in R^+;$$

3) функции $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^n$ *удовлетворяют обобщенному условию Каратеодори, т.е. при каждом фиксированном* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in R^+ \times R^+ \times \ldots \times R^+$ *функции* $G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *измеримы по аргументу* $t \in R^+$, *и почти при всех* $t \in R^+$ *эти функции непрерывны по совокупности своих аргументов* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *на множестве* $R^+ \times R^+ \times \ldots \times R^+$.

Тогда система (1) имеет положительное решение из следующего весового пространства:

$$\Im_\gamma \equiv \{\varphi(x) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right), \quad \varphi_i(x) - \text{измеримы на } R^+ \text{ и}$$
$$\int_0^\infty \gamma_i(x)\left|\varphi_i(x)\right| < +\infty, \quad \gamma_i(x) = \int_x^\infty K_i(t)dt, \quad x \in R^+, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\}.$$

3°. Доказательство и пример функций $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^n$. Рассмотрим следующие итерации:

$$f_i^{(p+1)}(x) = \int_0^\infty K_i(x-t) G_i(t, f_1^{(p)}(t), f_2^{(p)}(t), \ldots, f_n^{(p)}(t))dt,$$
$$f_i^{(0)}(x) = e^{-\varepsilon_i x}, \quad i = 1,2,\ldots,n,\ p = 0,1,2,\ldots, \quad x \in R^+. \tag{8}$$

Индукцией по p убедимся, что

$$a) \quad f_i^{(p)} \in L_1\left(R^+\right),\ i = 1,2,\ldots,n,\ p = 0,1,2,\ldots,$$

$$b) \quad f_i^{(p)} \uparrow \text{ по } p,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Сначала докажем b. Действительно, с учетом условий 1 и 2 сформулированной теоремы будем иметь

$$f_i^{(1)}(x) = \int_0^\infty K_i(x-t) G_i(t, e^{-\varepsilon_1 t}, e^{-\varepsilon_2 t}, \ldots, e^{-\varepsilon_n t})dt \geq$$
$$\geq 2\int_0^\infty K_i(x-t) e^{-\varepsilon_i t} dt = 2\int_0^\infty K_i^{\varepsilon_i}(x-t) e^{-\varepsilon_i(x-t)} e^{-\varepsilon_i t} dt =$$
$$= 2e^{-\varepsilon_i x}\int_{-\infty}^x K_i^{\varepsilon_i}(u)du \geq 2e^{-\varepsilon_i x}\rho_i\left(\varepsilon_i\right) \geq e^{-\varepsilon_i x} = f_i^{(0)}(x),$$

ибо $\rho_i\left(\varepsilon_i\right) \geq \dfrac{1}{2}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Предполагая, что $f_i^{(p)}(x) \geq f_i^{(p-1)}(x)$ при некотором $p \in N$, с учетом условия 1 получим

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \int_0^\infty K_i(x-t) G_i(t, f_1^{(p-1)}(t), f_2^{(p-1)}(t), \ldots, f_n^{(p-1)}(t)) dt = f_i^{(p)}(x),$$
$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Теперь займемся доказательством утверждения a. В случае $p = 0$ включение a очевидно, ибо $e^{-\varepsilon_i t} \in L_1\left(R^+\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Пусть условие a выполняются при некотором $p \in N$. Тогда, учитывая условия (2), (1) из (8) при каждом $r > 0$, будем иметь

$$\int_0^r f_i^{(p+1)}(x) dx \leq \int_0^r \int_0^\infty K_i(x-t)\left(\frac{f_i^{(p)}(t)}{\alpha_i} + \beta_{\varepsilon_i}(t)\right) dt dx =$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{f_i^{(p)}(t)}{\alpha_i} + \beta_{\varepsilon_i}(t)\right) \int_0^r K_i(x-t) dx dt \leq \frac{1}{\alpha_i} \int_0^\infty f_i^{(p)}(t) \int_{-\infty}^\infty K_i(u) du dt +$$
$$+ \alpha_i \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt = \int_0^\infty f_i^{(p)}(t) dt + \alpha_i \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt < +\infty,$$

ибо $\alpha_i = \int_{-\infty}^\infty K_i(u) du$, $i = 1,2,\ldots,n$. В полученном неравенстве, устремляя $r \to \infty$, заключаем, что

$$\int_0^\infty f_i^{(p+1)}(x) dx < +\infty.$$

Проинтегрируем обе части (8) по x в пределах от 0 до $+\infty$. В результате с использованием (2) и (3) будем иметь

$$\int_0^\infty f_i^{(p+1)}(x) dx \leq \int_0^\infty \int_0^\infty K_i(x-t)\left(\frac{f_i^{(p)}(t)}{\alpha_i} + \beta_{\varepsilon_i}(t)\right) dt dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{\alpha_i} \int_0^\infty f_i^{(p)}(t) \int_{-t}^\infty K_i(u) du dt + +\alpha_i \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt =$$
$$= \frac{1}{\alpha_i} \int_0^\infty f_i^{(p)}(t) \int_{-\infty}^t K_i(u) du dt + \alpha_i \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{\alpha_i} \int_0^\infty f_i^{(p+1)}(t)\left(\alpha_i - \gamma_i(t)\right) dt + \alpha_i \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt.$$

Из полученного неравенства немедленно следует, что

$$\int_0^\infty f_i^{(p+1)}(t) \gamma_i(t) dt \leq \alpha_i^2 \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t) dt < +\infty. \tag{9}$$

Таким образом, учитывая монотонность $f_i^{(p)}(t)$ по p и соотношение (9), заключаем, что последовательность вектор-функций

$$\left\{f^{(p)}(x)\right\}_{p=0}^{\infty}, \quad f^{(p)}(x) = \left(f_1^{(p)}(x), f_2^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x)\right)^T$$

имеет предел, когда $p \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} f^{(p)}(x) = f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\right)^T,$$

причем предельная вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет системе (1) в силу условия 3 и следующим неравенствам:

$$f_i(x) \geq e^{-\varepsilon_i x}, \;\; x \in R^+,$$

$$\int_0^\infty f_i(t)\gamma_i(t)dt \leq \alpha_i^2 \int_0^\infty \beta_{\varepsilon_i}(t)dt,$$

т.е. $f \in \Im_\gamma$. Теорема доказана.

Приведем один пример функций $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^n$, для которых выполняются все условия сформулированной теоремы.

В качестве функций $\left\{G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}_{i=1}^n$ рассмотрим следующий пример:

$$G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{3z_j + 2}{z_j + 1}\right) \cdot \sqrt{e^{-\varepsilon_i t} z_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Действительно, сначала заметим, что

$$\frac{\partial G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_k} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle \prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right) \cdot \frac{1}{\left(z_k+1\right)^2} \prod_{j=k+1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)\sqrt{e^{-\varepsilon_i t} z_i}, & \text{если } i \neq k, \\ \displaystyle \prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right) \cdot \frac{1}{\left(z_k+1\right)^2} \prod_{j=k+1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)\sqrt{e^{-\varepsilon_i t} z_i} + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)\frac{\sqrt{e^{-\varepsilon_i t}}}{\sqrt{z_i}}, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Так как $z_i \geq e^{-\varepsilon_i t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $\dfrac{\partial G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_k} > 0$.

Функции $G_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$, заданные согласно формуле (10), непрерывны по совокупности своих аргументов на множестве $\left(R^+\right)^{\times(n+1)} = \underbrace{R^+ \times R^+ \times \ldots \times R^+}_{n+1}$, следовательно, они удовлетворяют условию Каратеодори.

Ниже докажем, что если

$$\beta_{\varepsilon_i}(t) \geq \frac{3^{2n}}{4}\alpha_i e^{-\varepsilon_i t}, \; t \in R^+,$$

то

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)\cdot\sqrt{e^{-\varepsilon_i t}z_i} \le \frac{z_i}{\alpha_i}+\beta_{\varepsilon_i}(t),\ \ i=1,2,\dots,n,\ \ t\in R^+. \tag{11}$$

Действительно, поскольку

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(2+\frac{z_j}{z_j+1}\right)\le 3^n,$$

то из неравенств

$$z_i^2+\left(2\alpha_i\beta_{\varepsilon_i}(t)-3^{2n}\alpha_i^2e^{-\varepsilon_i t}\right)z_i+\alpha_i^2\beta_{\varepsilon_i}^2(t)\ge 0,\ i=1,2,\dots,n,\ t\in R^+ \tag{12}$$

следует (11). Очевидно, что неравенства (12) выполнимы, если

$$\left[2\alpha_i\beta_{\varepsilon_i}(t)-3^{2n}\alpha_i^2e^{-\varepsilon_i t}\right]^2-4\alpha_i^2\beta_{\varepsilon_i}^2(t)\le 0$$

что эквивалентно следующему неравенству для всех $i=1,2,\dots,n$:

$$\beta_{\varepsilon_i}(t)\ge\frac{3^{2n}}{4}\alpha_i e^{-\varepsilon_i t},\ t\in R^+.$$

Нам осталось убедиться, что

$$G_i(t,e^{-\varepsilon_1 t},e^{-\varepsilon_2 t},\dots,e^{-\varepsilon_n t})\ge 2e^{-\varepsilon_i t},\qquad i=1,2,\dots,n,$$

Заметим, что

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{3z_j+2}{z_j+1}\right)\ge 2^n\ge 2,$$

ибо $n\ge 1$. Следовательно,

$$G_i(t,e^{-\varepsilon_1 t},e^{-\varepsilon_2 t},\dots,e^{-\varepsilon_n t})\ge 2e^{-\varepsilon_i t},\qquad i=1,2,\dots,n.$$

В конце работы выражаю благодарность доктору физ.-мат. наук Х.А. Хачатряну за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Енгибарян Н.Б. *Об одной задаче нелинейного переноса излучения* // Астрофизика.-1966.- Т.2, №4.- С.31-36.
2. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О точной линеаризации задачи скольжения разреженного газа в БГК модели* // ТМФ.- 2000.- Т.119, №2.- С. 339-342.
3. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях* // ТМФ.- 2012.-Т.172, №3.- С. 497-504.
4. Kun Li, Xiong Li *Asymptotic behavior and uniqueness of traveling wave solutions in Richer competition system*//JournalMath. Analysis and Applications.-2012.-V.389, №1.- P. 486-497.
5. Panchal C.D. *Existence theorems for equation of Hammerstein type* // Quarterly Journal of Mathematics.- 1984.- V.35, №3.- P. 311-319.
6. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *О разрешимости нелинейных операторных уравнений* // Функц. анализ и его прилож.- 1971.- Т.5, №3.- С.42-44.

7. Енгибарян Н.Б. *О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае* // Известия РАН. Сер. Математическая.- 2006.- Т.70, №5.- С.79-96.
8. Арабаджян Л.Г. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна//Известия НАН Армении. Математика.- 1997.- Том 32, №1.- С. 21-28.
9. Brezis H., Browder F.E. *Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type* // Bull. Amer. Math. Soc.- 1975.-V.81, №1.- P.73-78.
10. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. *On Solvability of one class Ham-merstein nonlinear integral equations* // Buletinul Academici Stinte a Republicii Moldova. Math.- 2010.-Vol. 63, №2.- P. 67-83.
11. Хачатрян Х.А. *Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором* // Известия НАН Армении. Математика.- 2011.-Т.46, №2.- С. 71-86.
12. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Об одном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором* // Мат. сборник РАН.- 2010.-Т.201, №4.- С. 125-136.

Материал поступил в редакцию 14.03.2014.

ՀԱՄԵՐՇՏԵՅՆԻ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՕՊԵՐԱՏՈՐՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴՐԱԿԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մ. Ֆ. Բրոյան

Հետազոտվում է Համերշտեյնի ոչ կոմպակտ օպերատորով կիսառանցքի վրա ոչ գծային ինտեգրալային հավասարումների դաս: Ենթադրվում է, որ նշված օպերատորի կորիզը հանդիսանում է լիովին մոնոտոն ֆունկցիա և բավարարում է կրիտիկականության պայմանը: Որոշ ապրիորի գնահատականների կիրառմամբ և հատուկ իտերացիոն մեթոդներով հաջողվում է ապացուցել նշված համակարգի՝ ըստ կոմպոնենտների դրական լուծման գոյությունը որոշակի կշռային տարածությունում:

Առանցքային բառեր. Համերշտեյնի օպերատոր, մոտարկումներ, մոնոտոնություն, Կարաթեոդորիի պայման, զուգամիտություն:

THE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTION FOR SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS WITH HAMMERSTEIN NONCOMPACT OPERATORS

M.F. Broyan

The class of nonlinear integral equations on half line with Hammerstein noncompact operator is studied. It is assumed that kernel of mentioned operator is completely monotonic function and satisfies the condition of criticity.
Appling apriori estimations and using special iteration methods for above mentioned system in certain weight space we prove the existence of positive solution (by components).

Keywords: Hammerstein operator, iterations, monotonicity, conergence, Caratheodory condition.

УДК 517.958.537

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ

А.Н. Афян, В.М. Кахкцян

(Армянский национальный аграрный университет,
Московский технологический исследовательский университет)

E-mail: ashot1948@gmail.com, varazdat1948@mail.ru

Дается описание алгоритма и численной реализации решения одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона, возникающего в кинетической теории газов. Наряду с нелинейным уравнением решается также соответствующее линейное уравнение. Показано, что существует качественное различие между решениями в нелинейном и линейном случаях. Численные расчеты выполнены с помощью программы MathCad.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, итерации, уравнение Амбарцумяна, ограниченное решение, характеристическое уравнение.

1°. Введение. Рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение типа Урысона на полуоси:

$$F(x) = g(x) + \int_0^\infty W(x,t,F(t))\,dt \tag{1}$$

относительно искомой функции $F(x)$.

Здесь

$$g(x) = \frac{2\sqrt{T_0}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xs} e^{-\frac{1}{s^2 T_0}} \left(\frac{1}{s^2 T_0} + 1\right) \frac{ds}{s^2}, \tag{2}$$

$$W(x,t,F(t)) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-|x-t|s} e^{-\frac{1}{s^2 F(t)}} \left(\frac{1}{s^2 F(t)} + 1\right) \sqrt{F(t)}\, \frac{ds}{s}, \tag{3}$$

где $T_0 > 0$ - заранее заданный параметр.

Уравнение (1) возникает в кинетической теории газов. С помощью (1) описывается задача распределения температуры в полупространстве, ограниченном твердой плоской стенкой. Функция $F(x)$ играет роль температуры, T_0 – температура частиц, отраженных от стенки.

В работе [1] доказано, что уравнение (1), кроме постоянного решения $F = T_0 \equiv 1$, обладает положительным и ограниченным решением. Более того, это решение удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$g(x) \le F(x) \le c_0 = t_0^2,$$

где t_0 - положительный корень следующего алгебраического уравнения:

$$t^4 - \sqrt{T_0} t^3 - T_0^2 = 0.$$

В дальнейшем мы существенным образом будем использовать этот результат.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим также следующее неоднородное консервативное интегральное уравнение Винера – Хопфа:

$$f(x) = g_0(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, x \in R^+ \quad . \tag{4}$$

Здесь

$$K(x) = \int_0^\infty e^{-|x|s} G(s) ds, \quad G(s) = \frac{2}{3\sqrt{\pi} s} e^{-\frac{1}{s^2}} \left(\frac{1}{s^4} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2} \right), \tag{5}$$

$$g_0(x) = \int_0^\infty e^{-|x|s} G_0(s) ds, \tag{6}$$

$$G_0(s) = \frac{2}{3\sqrt{\pi} s^2} \left[\sqrt{T_0} e^{-\frac{1}{s^2 T_0}} \left(\frac{1}{s^2 T_0} + 1 \right) - e^{-\frac{1}{s^2}} \left(\frac{1}{s^2} + 1 \right) \right].$$

Заметим, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условию консервативности:

$$K(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1, \quad x \in R. \tag{7}$$

Линейное неоднородное уравнение (4) получается в результате линеаризации нелинейного уравнения (1). Для этого функцию $F(x)$ представим в виде

$$F(x) = 1 + f(x). \tag{8}$$

Предполагая, что $f(x) << 1$, разлагаем функцию $W(x,t,z) \neq 1$ в ряд Тейлора. В окрестности нуля, ограничиваясь первыми двумя членами разложения, имеем

$$W(x,t,F(t)) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-|x-t|s} e^{-\frac{1}{s^2}} \left(1 + \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s^4} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2} \right) f(t) \right) \frac{ds}{s}. \tag{9}$$

Подставляя (9), (10) в (1), приходим к уравнению (4).

Настоящая работа посвящена описанию алгоритма и численного решения нелинейного и линейного интегральных уравнений (1) и (4). Предлагаемый алгоритм основан на применении результатов теоремы (1) работы [1], уравнения Амбарцумяна и нелинейного уравнения факторизации, заимствованных из работы [2]. Выполнен большой объем численных расчетов. Расчеты показывают, что существует качественное различие между решениями в линейном и нелинейном случаях, что подтверждает теоретически доказанный результат. Численные расчеты выполнены с помощью программы MathCad.

2°. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ. Сначала рассмотрим линейное уравнение (4). Изучению и решению консервативного уравнения (4) посвящены многочисленные работы (см. [2-4] и ссылки в них). В силу линейности, решение уравнения (4) можно представить в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{10}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - решения неоднородного и однородного ($g_0 = 0$) уравнений соответственно. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что в результате применения нелинейного уравнения факторизации (см. $[2]$) по отношению к уравнению (4) решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$f_1(x) = Q(x) + \int_0^x \Phi(x-t)Q(t)\,dt, \tag{11}$$

где

$$Q(x) = \int_0^\infty e^{-xs}G_0(s)\phi(s)\,ds. \tag{12}$$

Здесь $\phi(s)$ - известная функция Амбарцумяна, которая удовлетворяет следующему уравнению Амбарцумяна:

$$\phi(s) = 1 + \phi(s)\int_0^\infty \frac{\phi(p)G(p)\,dp}{s+p}, \tag{13}$$

а $\Phi(x)$ – резольвентная функция, которая определяется из уравнения восстановления:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt, \tag{14}$$

где

$$V(x) = \int_0^\infty e^{-xs}G(s)\phi(s)\,ds. \tag{15}$$

Из представления $V(x)$ следует, что функция $\Phi(x)$ допускает представление (см. [4])

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha_1} + \int_0^x e^{-xs}\,d\omega(s). \tag{16}$$

Здесь $\alpha_1 = \int_0^\infty \frac{G(s)\phi(s)\,ds}{s^2}$, а ω- неубывающая на $(0,+\infty)$ и непрерывная в нуле функция. Решение уравнения (15) ищется в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{m=2}^{n} q_m e^{-p_m x}, \tag{17}$$

где числа p_m определяются из следующего характеристического уравнения:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\phi(s_k)G(s_k)}{s_k - p} = 1, \tag{18}$$

а числа q_m - в результате численного решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{q_m}{s_k - p} = 1, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Окончательное решение неоднородного уравнения (4) можно представить в виде

$$f_1(x) = \int_0^\infty e^{-xs} G_0(s)\phi(s)\left(1 - \frac{1}{\alpha_1 s}\right) ds + \beta + \sum_{m=2}^{n} q_m \int_0^\infty \frac{G_0(s)\phi(s)}{p_m - s}\left[e^{-xs} - e^{-p_m x}\right] ds. \tag{20}$$

Здесь

$$\beta = \lim_{x\to\infty} f_1(x) = \frac{1}{\alpha_1}\int_0^\infty \frac{G_0(s)\phi(s)\,ds}{s} = \frac{\gamma}{\alpha_1}. \tag{21}$$

Решение соответствующего линейного однородного уравнения (4) (при $g_0 = 0$) представляется в виде

$$f_2(x) = \frac{1}{\alpha_1} x + q(x), \tag{22}$$

где $q(x)$ - хорошо известная функция Хопфа.

Перейдем к описанию алгоритма решения уравнения (1).

Сначала решается характеристическое уравнение

$$t^4 - \sqrt{T_0}\, t^3 - T_0^2 = 0 \tag{23}$$

при различных значениях T_0 и определяется число $c_0 = t_0^2$.

Затем рассматриваются следующие последовательные приближения уравнения (1):

$$F_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^\infty W\left(x, t, F_n(t)\right) dt, \; n = 0,1,2,\ldots \;, \tag{24}$$

выбирая в качестве нулевого приближения

$$F_0(x) = c_0.$$

Следуя методу работы [1], аналогичным образом можно доказать, что последовательность функций $\left\{F_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает по n, причем $F_n(x) \geq g(x), \;\; n = 0,1,2,\ldots$. Следовательно, существует поточечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

причем, в силу теоремы Б. Леви, можно убедиться, что предельная функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и $g(x) \leq F(x) \leq c_0, \;\; x \in R^+$.

3°. Результаты численных расчетов. В таблице приведены значения c_0 в зависимости от различных значений температуры стенки T_0. Эти результаты получаются в результате решения характеристического уравнения (23).

Итерациями решается уравнение (24). Итерации прекращаются, как только разность между предыдущими и последующими итерациями становится меньше 10^{-5}. На рис. 1 изображен график функции температуры при различных значениях T_0. в нелинейном случае.

Далее рассматривается нелинейное функциональное уравнение Амбарцумяна (13). Дискретизация интеграла правой части (13) сводит его к конечной алгебраической системе. Эта система решается простыми итерациями. Численно решаются характеристическое уравнение (18) и система алгебраических уравнений (19).

Строятся решение неоднородного уравнения (4) согласно формуле

$$f_1(x)=\int_0^\infty e^{-xs}G_0(s)\phi(s)\left(1-\frac{1}{\alpha_1 s}\right)ds+\frac{1}{\alpha_1}\gamma+\sum_{m=2}^{n}q_m\int_0^\infty\frac{e^{-xs}-e^{-p_m x}}{p_m-s}\phi(s)G_0(s)\,ds$$

и решение однородного уравнения (4) (при $g_0=0$) по формуле (22), используя при этом табулированные значения функции Хопфа.

На рис. 2 изображен график функции температуры $T(x)=1+f(x)$ при различных значениях свободного параметра T_0 в линейном случае.

Таблица

Значения c_0 при различных значениях свободного параметра T_0

T_0	0,5	0,8	1	1,2	1,5
c_0	0,953	1,524	1,905	2,286	2,858

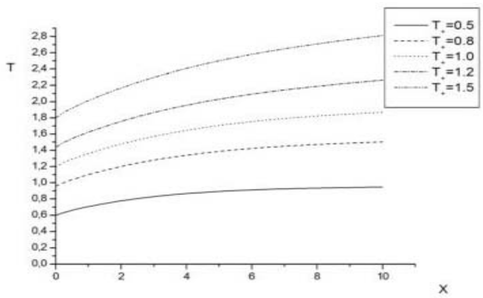


Рис. 1. График функции $T(x)$ решения нелинейного уравнения (1) при различных значениях свободного параметра T_0

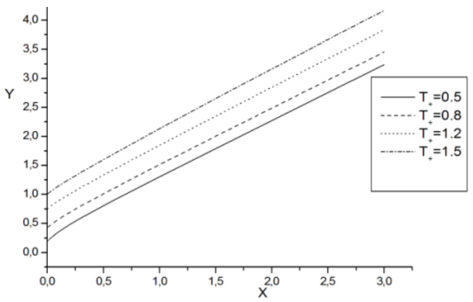


Рис. 2. График функции $T(x)=1+f(x)$ решения неоднородного уравнения (4) при различных значениях свободного параметра T_0

Отметим, что в ходе решения уравнений (1) и (4) численные результаты контролируются оценкой $g(x)\le F(x)\le c_0$. Они хорошо согласуются.

Заключение. Как и следовало ожидать, решение нелинейного интегрального уравнения (1) ограничено (см. рис. 1), в то время как решение соответствующего линейного уравнения, получаемого в результате линеаризации первоначального уравнения (1), имеет линейный рост в бесконечности. Качественное различие между решениями обусловлено линеаризацией нелинейного уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Кинетическое различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях* //ТМФ.- 2014.-Т.180, № 2.- С. 3-19.
2. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения* // Итоги науки и техники. Сер. Мат. Анализ.- 1984.- Т.22.- С.175-242.
3. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О некоторых интегральных уравнениях типа свертки кинетической теории* // Выч. мат. и мат. физ.- 1998.- Т.38, № 3.- С. 466-482.
4. Енгибарян Н.Б., Погосян А.А. *Об одном классе интегральных уравнений восстанавления* // Матем. Заметки.- 1990.- Т.47, № 6.- С. 23-30.

Материал поступил в редакцию 14.03.2014.

ԿԻՍԱԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա.Ն. Աֆյան, Վ.Մ. Քաղքցյան

Ներկայացվում է գազերի կինետիկ տեսությունում ծագող Ուրիսոնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման թվային լուծումը և ալգորիթմի նկարագրությունը: Ոչ գծային հավասարումներին զուգահեռ լուծվել է նաև համապատասխան գծային հավասարումը: Ցույց է տրվել, որ գծայինի և ոչ գծայինի դեպքերում գոյություն ունի լուծումների որակական տարբերություն: Թվային հաշվարկներն իրականացվել են MathCad ծրագրի միջոցով:

Առանցքային բառեր. ոչ գծային ինտեգրալ հավասարում, Համբարձումյանի հավասարում, սահմանային լուծում, բնութագրիչ հավասարում:

ON NUMERICAL SOLUTION OF ONE NONLINEAR AND LINEAR INTEGRAL EQUATION IN HALF LINE

A.N. Aphyan, V.M. Khachktsyan

The present work is devoted to describtion of algorithm and realization of numerical solution of one Urishon type nonlinear integral equation, arising in kinetic theory of gases. Along with nonlinear equation the corresponding linear equation is also solved. The qualitative difference between solutions in nonlinear and linear cases is demonstrated. Numerical calculations are carried out by means of MathCad program.

Keywords: nonlinear integral equation, iteration, Ambartsumyan equation, bounded solution, characteristic equation.

УДК 512.643.8; 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ ТИПА ТЕПЛИЦА [1]

А.С. Петросян, М.Г. Костанян

(АНАУ, Институт математики НАН Армении)

E-mails: Haykuhi25@mail.ru, Mikakost@mail.ru

Исследуется класс нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица, допускающих специальные представления. Указанная задача имеет непосредственное применение в теории переноса излучения в ядерных реакторах. С помощью специальных априорных оценок итерационным методом удается построить положительное решение для этой системы и изучить его дополнительные свойства.

Ключевые слова: бесконечная теплицева матрица, итерации, монотонность, нелинейность, положительное решение.

1°. ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрим следующий класс нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} h_k(x_k), \;\; n \in N_0 \equiv \{0,1,2,3,\dots\} \tag{1}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x \equiv (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)^T$, где T – знак транспонирования. Здесь $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ – бесконечная теплицева матрица следующего вида:

$$a_k = \int_0^{\lambda} s^{|k|} G(s) ds, \;\; k \in Z \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \tag{2}$$

где

$$\lambda \in (0,1), \quad G \in C[0,\lambda], G(s) > 0, s \in [0,\lambda], \tag{3}$$

причем

$$\gamma \equiv \int_0^{\lambda} \frac{1+s}{1-s} G(s) ds \geq 1. \tag{4}$$

Последовательность функций $\{h_j(u)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию критичности:

$$h_j(0) \equiv 0, \;\; \forall j \in N_0. \tag{5}$$

Система (1) имеет непосредственное применение в теории переноса излучения в ядерных реакторах (см. $[1-2]$).

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 13YR-1A0003.

В том случае, когда

$$a_n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z},\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1, \tag{6}$$

$$\nu(A) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n < 0 \tag{7}$$

(причем считается, что (7) является абсолютно сходящимся рядом), а нелинейность допускает следующее представление:

$$h_j(z) = G^*(z) - \omega_j(z), \tag{8}$$

где предполагается, что:

- $\omega_j(z) \downarrow$ по z на $[\delta, +\infty),\ \delta > 0,\ \omega_j \in C[\delta, +\infty)$,
- существует функция $\overset{\circ}{\omega} \in L_1(0,+\infty) \cap C_0(0,+\infty), \overset{\circ}{\omega} \downarrow$ на $[\delta, +\infty)$ такая, что

$$0 \leq \omega_j(z) \leq \overset{\circ}{\omega}(z + j + 1), \quad j \in N_0, \tag{9}$$

а $G^* \in C[0,\eta], G^* \uparrow$ на $[0,\eta], G^*(z) \geq z, z \in [0,\eta], G^*(\eta) = \eta$ при некотором $\eta = \eta(\delta) > 0$, система уравнений (1) исследовалась в работах [3-4].

В настоящей статье при существенно иных предположениях относительно $\{h_j(z)\}_{j \in N_0}$ с применением специальных итерационных методов и методов построения инвариантных обобщенных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора удается построить положительное решение для этой системы и исследовать некоторые дополнительные свойства полученного решения.

2°. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. На интервале $(\lambda, 1)$ рассмотрим следующую функцию:

$$\rho(q) \equiv \sum_{k=-\infty}^{0} \tilde{a}_k(q), \quad q \in (\lambda, 1), \tag{10}$$

где члены ряда (10) имеют вид

$$\tilde{a}_k(q) \equiv a_k q^{-k} = \begin{cases} \int\limits_0^\lambda \left(\dfrac{s}{q}\right)^k G(s)ds, & k = 0,1,2,\ldots, \\ \int\limits_0^\lambda (sq)^{-k} G(s)ds, & k = -1,-2,-3,\ldots. \end{cases} \tag{11}$$

С учетом (11) из (10) будем иметь

$$\rho(q) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \tilde{a}_k + \tilde{a}_0 = \int_0^\lambda \sum_{j=1}^{\infty} (sq)^j G(s)ds + \int_0^\lambda G(s)ds = \int_0^\lambda \frac{1}{1 - sq} G(s)ds. \tag{12}$$

Из представления (12), в силу условий (3), следует, что:

- $\rho(q) \uparrow$ по q на интервале $(\lambda, 1)$;
- $\rho \in C(\lambda, 1)$;

- $\rho(1-)=\int\limits_0^\lambda \frac{1}{1-s}G(s)ds \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^\lambda \frac{1+s}{1-s}G(s)ds \geq \frac{1}{2}.$

Следовательно, по теореме Коши существует число $q_0 \in (\lambda,1)$ такое, что

$$\rho(q_0) \geq \frac{1}{3}. \tag{13}$$

Зафиксируем это число и сформулируем следующий основной результат.

Теорема. *Пусть последовательность функций* $\{h_j(z)\}_{j\in \mathrm{N}_0}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$i_1)$ *при каждом фиксированном* $j \in N_0$ *функции* $h_j(z) \uparrow$ *по* z *на* $[q_0^j,+\infty)$;

$i_2)$ *существует бесконечный вектор*

$$\beta(q_0) \equiv (\beta_1(q_0), \beta_2(q_0), \ldots, \beta_n(q_0), \ldots) \in l_1 \tag{14}$$

такой, что

$$\beta_n(q_0) \geq 3q_0^n,\ n \in N_0,\quad h_j(z) \leq \frac{z}{\gamma} + \beta_j(q_0),\ z \geq q_0^j,\ h_j(q_0^j) \geq 3q_0^j,\ \ j \in N_0; \tag{15}$$

$i_3)$ *при каждом фиксированном* $j \in N_0$ *функции* $h_j(z)$ *непрерывны на множестве* $[q_0^j,+\infty)$.

Тогда при условиях (2)-(4) система (1) имеет покомпонентно положительное решение из следующего пространства:

$$x \in \mathfrak{M} \equiv \{\tau \equiv (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots)^T,\ \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\lambda) \mid \tau_j \mid < +\infty\}, \tag{16}$$

где

$$\phi_j(\lambda) \equiv \int\limits_0^\lambda \frac{s^{j+1}}{1-s}G(s)ds, \quad j \in N_0. \tag{17}$$

Прежде чем займемся доказательством сформулированной теоремы, приведем примеры функций $\left\{h_j\left(u\right)\right\}_{j\in N_0}$, для которых выполняются условия этой теоремы. Имеем

$$h_j\left(u\right) = 3\sqrt{q_0^j u},\ \ j \in N_0,\ \ u \geq q_0^j. \tag{18}$$

Действительно, сначала заметим, что все функции $h_j\left(u\right)$ монотонно возрастают по u для каждого $j \in N_0$. С другой стороны, очевидно, что $h_j\left(q_0^j\right) = 3q_0^j$. Из представления (18) немедленно следует также непрерывность функций $\left\{h_j\left(u\right)\right\}_{j\in N_0}$ по u. Ниже убедимся, что если в качестве бесконечного вектора $\beta\left(q_0\right) \in l_1$ выбрать любой вектор, координаты которого удовлетворяют условиям

$$\beta_n(q_0) \ge \frac{9\gamma}{4} q_0^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(q_0) < +\infty, \ n \in N_0,$$

то неравенства

$$h_j(z) \le \frac{z}{\gamma} + \beta_j(q_0), \ j \in N_0, \ z \ge q_0^j$$

автоматически будут выполнены. Действительно, неравенства

$$3\sqrt{q_0^j z} \le \frac{z}{\gamma} + \beta_j(q_0), \ z \ge q_0^j, \ j \in N_0 \tag{19}$$

равносильны следующим неравенствам:

$$z^2 + \left(2\gamma\beta_j(q_0) - 9\gamma^2 q_0^j\right) z + \gamma^2 \beta_j^2(q_0) \ge 0, \quad j \in N_0, \ z \ge q_0^j. \tag{20}$$

Очевидно, (20) выполняется, если $\left(2\gamma\beta_j(q_0) - 9\gamma^2 q_0^j\right)^2 \le 4\gamma^2\beta_j^2(q_0)$ или $\beta_j(q_0) \ge \dfrac{9\gamma}{4} q_0^j, \ j \in N_0$.

3°. Доказательство теоремы. Введем следующие итерации для системы (1):

$$\begin{gathered} x_n^{(p+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j^{(p)}\right), \ n \in N_0, \ p \in N_0, \\ x_n^{(0)} = q_0^n, \qquad n = 0,1,2,\dots. \end{gathered} \tag{21}$$

Сначала индукцией по p убедимся, что

$$x_n^{(p)} \uparrow \text{ по } p, \ n \in N_0. \tag{22}$$

Сперва докажем, что $x_n^{(1)} \ge x_n^{(0)}, \ n \in N_0$. В силу условия (15) с учетом (13) и (11) из (21) будем иметь

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} q_0^{j-n} q_0^{n-j} h_j\left(q_0^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{n-j}(q_0) q_0^{n-j} h_j\left(q_0^j\right) \ge 3q_0^n \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_{n-j}(q_0) = \\ &= 3q_0^n \sum_{k=-\infty}^{n} \tilde{a}_k(q_0) \ge 3q_0^n \sum_{k=-\infty}^{0} \tilde{a}_k(q_0) = 3q_0^n \rho(q_0) \ge q_0^n = x_n^{(0)}, \end{aligned}$$

ибо $\rho(q_0) \ge \dfrac{1}{3}$. Теперь, предполагая, что $x_n^{(p)} \ge x_n^{(p-1)}, \ n \in N_0$ при некотором $p \in N$, из (21) с учетом монотонности функций $\left\{h_j(z)\right\}_{j \in N_0}$ по z на $\left[q_0^j, +\infty\right)$ получим $x_n^{(p+1)} \ge \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j^{(p-1)}\right) = x_n^{(p)}$. Таким образом, (22) установлено.

Индукцией по p также можно доказать, что

$$x^{(p)} = \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}, \dots\right) \in l_1, \ p \in N_0. \tag{23}$$

Следовательно, учитывая неравенства (15) и тот факт, что $x^{(p)} \in l_1$, из (21) будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(p+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} h_j\left(x_j^{(p)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j\left(x_j^{(p)}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-j} \le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x_j^{(p)}}{\gamma} + \beta_j\left(q_0\right)\right)\sum_{k=-j}^{\infty} a_k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x_j^{(p)}}{\gamma} + \beta_j\left(q_0\right)\right)\left(\sum_{k=-j}^{\infty} a_k + \sum_{k=-\infty}^{-j-1} a_k - \sum_{k=-\infty}^{-j-1} a_k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x_j^{(p)}}{\gamma} + \beta_j\left(q_0\right)\right)\left(\gamma - \sum_{m=j+1}^{\infty} a_m\right) \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} x_j^{(p+1)} - \frac{1}{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{(p+1)} \sum_{m=j+1}^{\infty} a_m + \gamma \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\left(q_0\right)$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j^{(p+1)} \sum_{m=j+1}^{\infty} a_m \le \gamma^2 \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\left(q_0\right), \quad p \in N_0. \tag{24}$$

С другой стороны, простые вычисления показывают, что

$$\varphi_j\left(\lambda\right) = \sum_{m=j+1}^{\infty} a_m = \int_0^{\lambda} \frac{s^{j+1}}{1-s} G\left(s\right) ds, \quad j \in N_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j\left(\lambda\right) x_j^{(p+1)} \le \gamma^2 \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\left(q_0\right). \tag{25}$$

Из (22) и (25) заключаем, что последовательность $x^{(p)} = \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}, \ldots\right)$ имеет предел, когда $p \to \infty$, $x = \lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)}$, причем этот предел удовлетворяет системе (1) в силу непрерывности функций $\left\{h_j\left(u\right)\right\}_{j \in N_0}$ и следующим неравенствам:

$$x = \left(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n, \ldots\right)^T, \ \ x_j \ge q_0^j, \ \ j \in N_0, \ \ \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j\left(\lambda\right) x_j \le \gamma^2 \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\left(q_0\right). \tag{26}$$

Таким образом, $x \in \mathfrak{M}$, и тем самым **теорема доказана.**

Авторы выражают благодарность доктору физ.-мат. наук Х.А. Хачатряну за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В.А. *Научные труды.* Том 1.- Ереван: Изд. АН АрмССР, 1960.- 431 с.
2. Енгибарян Н.Б. *Об одной задаче нелинейного переноса излучения* // Астрофизика.- 1966.- 2(3).- С.31-36.
3. Хачатрян Х.А., Броян М.Ф. *О разрешимости одного класса нелинейных алгебраических систем с матрицами типа Теплица* // Мат. в Высшей школе.- 2010.- Т.6, № 1.-С. 9-13.
4. Хачатрян Х.А., Броян М.Ф. *Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса нелинейных бесконечных алгебраических систем с матрицами типа Теплица-Ганкеля* // Известия НАН Армении. Математика.- 2013.- Т.48, № 5.- С. 63-78.

Материал поступил в редакцию 14.03.2014.

ՏՅՈՊԼԻՑԻ ՏԻՊԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հ.Ս. Պետրոսյան, Մ.Գ. Կոստանյան

Հետազոտվում է հատուկ ներկայացում ունեցող Տյոպլիցի տիպի մատրիցներով անվերջ ոչ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի մի դաս: Նշված խնդիրն ունի անմիջական կիրառություն ատոմային ռեակտորներում ճառագայթման տեղափոխման տեսության մեջ: Հատուկ ապրիորի գնահատականների միջոցով իտերացիոն մեթոդներով հաջողվում է կառուցել այդ համակարգի դրական լուծումը և հետազոտել ստացված լուծման լրացուցիչ հատկությունները:

Առանցքային բառեր. անվերջ տյոպլիցյան մատրից, իտերացիաներ, մոնոտոնություն, ոչ գծայնություն, դրական լուծում:

ON SOLVABILITY OF ONE CLASS OF NONLINEAR INFINITY SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS WITH THE THEOPLITZ MATRICES

H.S. Petrosyan, M.G. Kostanyan

The class of nonlinear infinity systems of algebraic equations with the special type Theoplitz matrices is considered. Mentioned problem has direct applications in radiative transfer theory in nuclear reactors. Combining special apri'ori estimations with the iteration methods allow us to construct positive solution of this system and to study additional properties of obtained solution.

Keywords: infinity Teoplitz matrices, iteration, monotonicity, nonlinearity, positive solution.

ISBN 1829-3344 MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL. 2014. VOLUME 10, № 1

UDC 51

THE SOLUTION OF EVOLUTION MODEL WITH RECOMBINATION AND PARTIAL NEUTRALITY IN STEADY-STATE

M. Ghazaryan

(State Engineering University of Armenia (Polytechnic))

E-mail: makarghazaryan@gmail.com

An evolution model with recombination and partial neutrality, consisting of two-block genome sequences, where we introduce two dimensional fitness landscape to describe it. In our model the central genome sequence and some mutant sequences from its neighbor Hamming class have high fitness A, the rest of sequences have zero fitness. We solved this model in steady-state with $1/L$-th order accuracy, where L is the length of sequences. We also calculated the dynamics of the model during time numerically, which was in a good coincidence with theoretical results, when the system approaches to the steady-state.

Keywords: evolution models, fitness landscape, genome sequence, probability.

1°. INTRODUCTION. Nowadays the Crow-Kimura [1,2] and Eigen models [3] are widely applied for description of virus evolution. These models describe the infinite population size evolution under the selection and mutation (some gene in the genome changes its type). The generalization of Crow-Kimura model has been applied to describe the recombination phenomenon as well [4,5]. During the recombination two viruses meet, and exchange with some part of genome. In this article we consider the simpler version of recombination, the horizontal gene transfer (HGT). We take any gene of the virus, and replace it with any other gene at the same position from the other virus chosen randomly from the population.

To describe the evolution, one should first of all define the fitness landscape, prescribing fitness to all the genomes (sequences). Then the first goal of investigation is to define the mean fitness of population.

The simplest non-trivial version is the sharp peak fitness landscape, when one genome has a high reproduction rate (fitness), while all the other genomes have equal, lower fitness. Such a single peak fitness with recombination has been investigated in [6] in the infinite genome limit, then with the finite genome size correction terms in [7].

Another interesting case of fitness landscape is related with the partial neutrality, when the central genome sequence and some mutant sequences from its neighbor Hamming class have high fitness A and the rest of sequences have zero fitness. Such neutral fitness landscapes play an important role in evolution [5]. In [8] the mean fitness has been calculated in the main approximation. The finite genome size corrections are rather strong. In the current article we give more accurate solution of the model.

Here we consider the genome of length L as a collection of L nucleotides of two types: $+1$ and -1 [2], and there are 2^L different sequences, labeled by S_i with $0 \le i \le 2^L - 1$. S_i has the probability $p_i(t)$ to appear at time t, and the reproduction rate r_i, which is independent of time. In the Crow-Kimura (CK) model [1, 2], $p_i(t)$ satisfies coupled differential equations, in which the mutation and the reproduction appear in different terms, and the CK model belongs to the parallel mutation-selection scheme. In the Eigen model [3], $p_i(t)$ satisfies coupled differential equations in which the mutation and the reproduction appear in the same term, and the Eigen model belongs to the coupled mutation-selection scheme. The CK model [1, 2] and the Eigen model [3] were first studied with the single peak fitness function (also called landscape), in which one sequence, say S_0, has higher reproduction rate, and other sequences have small reproduction rates. For the CK model with the single peak fitness function, one can simply choose r_0 of S_0 to be $A > 0$, and r_i of other S_i with $i \ne 0$ to be 0.

The Crow-Kimura (CK) model with single peak fitness landscape has been solved in [4]. In the single peak fitness landscape the 0-th sequence has a fitness A and the rest has fitness 0. Here we consider the simple recombination in an infinite population in case of the specific neutral fitness landscape: the peak (0-th) sequence with only $+1$ nucleotides and its $d \equiv \nu L$ neighbors ($0 < \nu < 1$) with single mutations have fitness A, other sequences have fitness 0. Due to neutrality, even without recombination, the population is grouped around the sequence with a large number of neutral neighbors (0-th sequence in our case) [5]. The infinite population version of the HGT (Horizontal Gene Transfer) model could be described via the following system of equations for p_n: total probabilities of sequences in the n-th Hamming class (collection of genome types having the same number n of mutations) [9, 6, 7] with $0 \le n \le L$:

$$\frac{dp_n}{dt} = p_n\left(r_n - R\right) + \frac{\mu}{L}\left[\left(L-n+1\right)p_{n-1} + \left(n+1\right)p_{n+1}\right] - \mu p_n +$$
$$+c\left[\left(1-\frac{\overline{n}}{L}\right)\left(1-\frac{n}{L}\right)+\frac{n}{L}\frac{\overline{n}}{L}\right]p_n - cp_n + c\left[\left(1-\frac{\overline{n}}{L}\right)\frac{n+1}{L}p_{n+1} + \frac{\overline{n}}{L}\left(1-\frac{n-1}{L}\right)p_{n-1}\right], \qquad (*)$$

where c and μ are the per genome recombination and mutation rates, r_n is the fitness of the sequences from the n-th Hamming class, $\overline{n} = \sum_{n=0}^{L} np_n$, and $R = \sum_{n=0}^{L} r_n p_n$ is the mean fitness. This system of equations is well known and was explained in details in [6, 7]. The first term of Eq. $(*)$ corresponds to the growth with the rate proportional to the fitness, while there is also uniform dilution of the system to keep constant population size. The next terms are related with the mutations; the recombination terms are on the second line. The probability of choosing a -1 spin in the given sequence from the $(n+1)$-th class is $(n+1)/L$. This spin could be replaced by a $+1$ spin from the sequence pool; the probability of such a choice is $\left(1-\frac{\overline{n}}{L}\right)$. Thus we obtain the term $c\left(1-\frac{\overline{n}}{L}\right)\frac{n+1}{L}p_{n+1}$. The other c-proportional terms of Eq. $(*)$ are derived in a similar way. When the erased plus-gene is replaced by plus-gene from the population, the new virus stays in the old Hamming class. Otherwise the Hamming class of the virus changes.

2°. THE CASE OF TWO-DIMENSIONAL FITNESS LANDSCAPE. To describe the recombination with the νL neutral neighbors, we consider two-dimensional (two-block) evolution model with recombination [7, 10]. In the two-block evolution model with the sequence blocks $L_1 = \nu L$, $L_2 = (1-\nu)L$ and total sequence length $L = L_1 + L_2$, we identify L_1 spins with neutral mutations and L_2 spins with non-neutral mutations. We consider the following system of equations [7] for the probabilities $p_{n,m}$, where $0 \le n \le L_1$, $0 \le m \le L_2$.

$$\frac{dp_{n,m}}{dt} = \left(r_{n,m} - R\right)p_{n,m} - \mu p_{n,m} + \frac{\mu}{L}\left[\left(L_1 - n + 1\right)p_{n-1,m} + \left(n+1\right)p_{n+1,m} +\right.$$
$$\left. + \left(L_2 - m + 1\right)p_{n,m-1} + \left(m+1\right)p_{n,m+1}\right] - cp_{n,m} + \frac{c}{L}\left[\left(1-\frac{\overline{n}}{L_1}\right)\left(L_1 - n\right) + \frac{\overline{n}}{L_1}n\right]p_{n,m} +$$
$$+\frac{c}{L}\left[\left(1-\frac{\overline{m}}{L_2}\right)\left(L_2 - m\right) + \frac{\overline{m}}{L_2}m\right]p_{n,m} + \frac{c}{L}\left[\left(1-\frac{\overline{n}}{L_1}\right)\left(n+1\right)p_{n+1,m} + \frac{\overline{n}}{L_1}\left(L_1 - n + 1\right)p_{n-1,m}\right] + \qquad (1)$$
$$+\frac{c}{L}\left[\left(1-\frac{\overline{m}}{L_2}\right)\left(m+1\right)p_{n,m+1} + \frac{\overline{m}}{L_2}\left(L_2 - m + 1\right)p_{n,m-1}\right],$$

where $\bar{n}$ and $\bar{m}$ are defined as

$$\bar{n} = \sum_{n,m} p_{n,m} n, \quad \bar{m} = \sum_{n,m} p_{n,m} m. \tag{2}$$

Equation (1) is the some sort of generalization of $(*)$ when there are two independent blocks L_1 and L_2 in the sequences, and also not all sequences of the same Hamming class have the same probability and rate functions. Equation (1) can be obtained by the same considerations as it was explained after $(*)$. We also can see, that $(*)$ can be obtained from (1) considering symmetric case (i.e. $p_{n,m} = p_{n'+m'}$, only if $n+m = n'+m'$) and the following statements (sometimes obvious): $N = n+m$ (we have changed notation n from $(*)$ into N not to confuse with n from (1)), $L = L_1 + L_2$, $\bar{N} = \bar{n} + \bar{m}$, $\frac{\bar{N}}{L} = \frac{\bar{n}}{L_1} = \frac{\bar{m}}{L_2}$ (to preserve the uniform distribution of minus genes in sequences).

We will consider the following fitness landscape:

$$r_{0,0} = r_{1,0} = A, \tag{3}$$

and for all other sequences $r_{n,m} = 0$. We have also, that

$$R = p_{0,0} + p_{1,0}. \tag{4}$$

Also we make the following denotation:

$$\Delta_R = R - A + \mu. \tag{5}$$

Let's make the following ordinal decomposition for all $p_{n,m}$-s and Δ_R up to the $1/L$-th order:

$$p_{n,m} = a_{n,m} + \frac{b_{n,m}}{\sqrt{L}} + \frac{c_{n,m}}{L}, \tag{6}$$

$$\Delta_R = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{L}} + \frac{\gamma}{L}. \tag{7}$$

From equation (1) we can derive the following expressions for time derivatives of $p_{0,0}$, $p_{1,0}$ and $p_{0,1}$:

$$\frac{dp_{0,0}}{dt} = p_{0,0}\left(A - R - \mu - \frac{c\left(\bar{n}+\bar{m}\right)}{L}\right) + p_{1,0}\frac{\mu + c\left(1-\frac{\bar{n}}{L_1}\right)}{L} + p_{0,1}\frac{\mu + c\left(1-\frac{\bar{m}}{L_2}\right)}{L}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_{1,0}}{dt} = p_{1,0}\left(A - R - \mu + \frac{c}{L}\left(\frac{2\bar{n}}{L_1} - \bar{n} - \bar{m} - 1\right)\right) + p_{0,0}\frac{\mu L_1 + c\bar{n}}{L} + \\ + p_{2,0}\frac{2\left(\mu + c\left(1-\frac{\bar{n}}{L_1}\right)\right)}{L} + p_{1,1}\frac{\mu + c\left(1-\frac{\bar{m}}{L_2}\right)}{L},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{dp_{0,1}}{dt} = p_{0,1}\left(-R-\mu+\frac{c}{L}\left(\frac{2\overline{n}}{L_1}-\overline{n}-\overline{m}-1\right)\right)+p_{0,0}\frac{\mu L_2+c\overline{m}}{L}+$$
$$+p_{0,2}\frac{2\left(\mu+c\left(1-\frac{\overline{m}}{L_2}\right)\right)}{L}+p_{1,1}\frac{\mu+c\left(1-\frac{\overline{n}}{L_1}\right)}{L}. \tag{10}$$

Let's insert the expressions from (5), (6), (7) into (8), (9), (10) and consider up to the $1/L^{3/2}$ -th, $1/L$ -th and $1/L$ -th order members respectively:

$$\frac{dp_{0,0}}{dt} = -a_{0,0}\alpha+\frac{-b_{0,0}\alpha-a_{0,0}\beta}{\sqrt{L}}+$$
$$+\frac{1}{L}\left(-a_{0,0}c\left(\overline{m}+\overline{n}\right)-c_{0,0}\alpha-b_{0,0}\beta-a_{0,0}\gamma+\left(c+\mu\right)\left(a_{1,0}+a_{0,1}\right)\right)+ \tag{11}$$
$$+\frac{1}{L^{3/2}}\left(-b_{0,0}c\left(\overline{m}+\overline{n}\right)-c_{0,0}\beta-b_{0,0}\gamma+\left(c+\mu\right)\left(b_{1,0}+b_{0,1}\right)\right),$$

$$\frac{dp_{1,0}}{dt} = \left(-a_{1,0}\alpha+a_{0,0}\mu\nu\right)+\frac{1}{\sqrt{L}}\left(-b_{1,0}\alpha-a_{1,0}\beta+b_{0,0}\mu\nu\right)+$$
$$+\frac{1}{L}\left(\frac{a_{0,0}c\overline{n}}{\nu}+\left(c+\mu\right)\left(2a_{2,0}+a_{1,1}\right)-c_{1,0}\alpha-b_{1,0}\beta-a_{1,0}\left(c\left(1+\overline{m}+\overline{n}\right)+\gamma\right)+c_{0,0}\mu\nu\right), \tag{12}$$

$$\frac{dp_{0,1}}{dt} = \left(\mu\left(1-\nu\right)a_{0,0}-a_{1,0}\left(A+\alpha\right)\right)+\frac{1}{\sqrt{L}}\left(b_{0,0}\mu\left(1-\nu\right)-b_{0,1}\left(A+\alpha\right)-a_{0,1}\beta\right)+J$$
$$+\frac{1}{L}\left(-c_{1,0}\left(A+\alpha\right)-b_{1,0}\beta-a_{0,1}\left(c\left(1+\overline{m}+\overline{n}\right)+\gamma\right)+c_{0,0}\mu\left(1-\nu\right)+\left(c+\mu\right)\left(2a_{0,2}+a_{1,1}\right)\right). \tag{13}$$

As we are interested in steady state solutions, we consider each coefficient of $1/L$ -th powers to be equal to zero. Thus, from the first and second members of (11) and the first member of (13) we find, that

$$a_{0,0}=\alpha=a_{0,1}=0. \tag{14}$$

From the third member of (11), second member of (12) and second member of (13) we find three equations:

$$-b_{0,0}\beta+\left(c+\mu\right)a_{1,0}=0, \tag{15}$$
$$-a_{1,0}\beta+b_{0,0}\mu\nu=0, \tag{16}$$
$$b_{0,0}\mu\left(1-\nu\right)-Ab_{0,1}=0. \tag{17}$$

From (15), (16) we find, that

$$\beta=\sqrt{\mu\nu\left(\mu+c\right)}\,. \tag{18}$$

Then, from (16), (17) respectively:

$$b_{0,0}=\frac{\beta}{\mu\nu}a_{1,0}\,, \tag{19}$$

$$b_{0,1} = \frac{\mu(1-\nu)}{A} b_{0,0} . \tag{20}$$

From equations (4)- (7), (14), (19) we get the following:

$$a_{1,0} = \frac{A-\mu}{A} , \tag{21}$$

$$b_{1,0} = \frac{\sqrt{\mu\nu(\mu+c)}(A-\mu)}{A}\left(\frac{1}{A-\mu} - \frac{1}{\mu\nu}\right). \tag{22}$$

From (1) the following expressions can be easily found for $n \geq 1$ and $m \geq 1$:

$$a_{n,0} = \left(\frac{\mu\nu}{A}\right)^{n-1} a_{1,0} , \tag{23}$$

$$a_{0,m} = 0 , \tag{24}$$

$$b_{0,m} = \left(\frac{\mu(1-\nu)}{A}\right)^{m} b_{0,0} , \tag{25}$$

$$a_{n,m} = \frac{\mu}{A}\left(\nu a_{n-1,m} + (1-\nu) a_{n,m-1}\right). \tag{26}$$

The last recursive expression after some calculations and simplifications can be represented in this way:

$$a_{n,m} = a_{1,0}\left(\frac{\mu\nu}{A}\right)^{m}\left(\frac{\mu(1-\nu)}{A}\right)^{n-1}\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} . \tag{27}$$

Using (27), we can find for the first approximation of $\overline{n}$ and $\overline{m}$ the following expressions, which we'll use letter for calculating $\frac{1}{L}$-th order members:

$$\overline{n} = \frac{A(A-\mu\nu)}{(A-\mu)^2} a_{1,0} = \frac{A-\mu\nu}{A-\mu} , \tag{28}$$

$$\overline{m} = \frac{A\mu\nu}{(A-\mu)^2} a_{1,0} = \frac{\mu\nu}{A-\mu} , \tag{29}$$

$$\overline{n} + \overline{m} = \frac{A^2}{(A-\mu)^2} a_{1,0} = \frac{A}{A-\mu} . \tag{30}$$

Here we approximately replaced L_1 and L_2 with ∞, which gives practically no difference.

Now, using equations (4), (5), (7), (29) from the fourth member of (11), third member of (12) and third member of (13) we find the following four equations:

$$\gamma - A(c_{0,0} + c_{1,0}) = 0 , \tag{31}$$

$$-\beta c_{0,0} - b_{0,0}\gamma - \frac{A}{A-\mu} b_{0,0} c + \left(\mu + c\right)\left(b_{0,1} + b_{1,0}\right) = 0\,, \tag{32}$$

$$\mu\nu c_{0,0} - a_{1,0}\gamma + \left(\mu + c\right)\left(2a_{2,0} + a_{1,1}\right) - a_{1,0} c\left(1 + \frac{A}{A-\mu}\right) - b_{1,0}\beta = 0, \tag{33}$$

$$\mu\left(1-\nu\right) c_{0,0} - A c_{0,1} - \beta b_{0,1} + \left(\mu + c\right) a_{1,1} = 0\,. \tag{34}$$

After solving this system relative to variables γ, $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{0,1}$, and inserting all the found values of members, we find $\frac{1}{L}$-th order members:

$$c_{0,0} = \frac{2\mu^2\nu\left(\mu + c\right) + \left(A\mu - A^2\right)\left(2\mu + c\right)}{2A^2\mu\nu}\,, \tag{35}$$

$$c_{1,0} = \frac{Ac\mu + A^2\left(\mu - c\right) - \mu^2\left(\mu + c\right)\left(1+\nu\right)}{A^2\left(A-\mu\right)} + c_{0,0}\left(\frac{\mu\nu}{A-\mu} - 1\right), \tag{36}$$

$$c_{0,1} = \frac{\mu\left(1-\nu\right)}{A} c_{0,0}\,, \tag{37}$$

$$\gamma = A\left(c_{0,0} + c_{1,0}\right). \tag{38}$$

To check the results found here we also made numerical calculations of dynamics of R, using Euler's method to solve the system of first order differential equations: Eqs. (1) (Fig.).

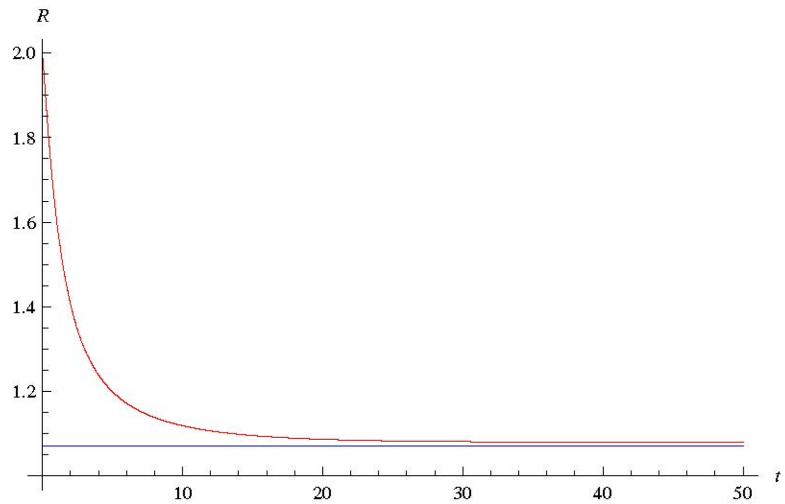


Fig. Dynamics of R

Straight line represents the value for steady-state gotten by analytic calculation. Second line is the dynamics gotten by numerical calculation. We used the following values for constants and initial distributions: $A = 2$, $\mu = 1$, $c = 1$, $L = 260$, $L_1 = 200$, $L_2 = 60$, $p_{0,0} = 1$, $p_{1,0} = 1$, $p_{n,m} = 0$ for other "p"-s. Using analytical method, we found for these values $R = 1.07115$. Numerical method (Euler's method) gives approximately $R = 1.07954$.

As we can see our analytical result has been well confirmed by numerical calculations. The partial neutrality is typical case for virus evolution and we assume that our analytical results could be applied in virology, where the genome length is rather large, more than 1000, and where better to use analytical formulae than to do large numerical calculations for two-dimensional genome landscape.

REFERENCE

1. Crow J. and Kimura M. *An Introduction to Population Genetics Theory*.- Harper Row, New York, 1970.
2. Baake E. and Wagner H. //Genet. Res.2001.- 78.-P. 93.
3. Eigen M.//Naturwissenschaften.-1971.- 58.- 465; Eigen M., McCaskill J. J., Schuster P.// Adv. hem. Phys.-1989.- 75.- P. 149.
4. Saakian D.and Hu C.-K.// Phys. Rev. Lett. E.-2004.- 69.- 046121.
5. Nimwegen E.V., Crutchfield J. P. and Huynen M.// Proc. Natl. Acad. Sci.- USA, 1999.- 96.- P. 9716.
6. Park J.-M. and Deem M. W. // Phys. Rev. Lett.-2007.- 98.- 058101.
7. Avetisyan Zh. and Saakian D.// Phys. Rev. Lett. E.-2010.- 81.- 051916; Kirakosyan Z., Saakian D. and Hu C.-K.// J. Stat. Phys.-2011.- 144.- P. 198.
8. Saakian D., Hu C.-K.// Phys. Rev. E.-2013.- 88.- 052717.
9. Cohen D.A.K.E. and Levine H.// Phys. Rev. Lett.-2005.- 94.- 098102.
10. Saakian D., Kirakosyan Z. and Hu C.-K.// Phys. Rev. Lett. E.-2012.- 86.- 031920.

The date of receiption 10.03.2014.

ՌԵԿՈՄԲԻՆԱՑԻԱՅՈՎ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻ ՉԵԶՈՔՈՒԹՅԱՄԲ ԷՎՈԼՅՈՒՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ՝ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇԻՌ ՎԻՃԱԿՈՒՄ

Մ. Ղազարյան

Հետազոտվել է երկմասնյա գենոմային շղթաներից բաղկացած, ռեկոմբինացիայով և մասնակի չեզոքությամբ էվոլյուցիոն մոդել, որը նկարագրելու համար ներմուծվել է կենսունակության երկչափ բաշխում: Մեր մոդելում կենտրոնական գենոմային շղթան և նրան

հարևան հեմինգյան դասից որոշ մուտանտ շղթաներ ունեն բարձր A կենսունակություն, մնացյալ շղթաների կենսունակությունը զրո է: Մոդելը լուծվել է հավասարակշռության վիճակում՝ $1/L$ -րդ կարգի ճշտությամբ, որտեղ L -ը շղթաների երկարությունն է: Թվայնորեն ստացվել է նաև մոդելի դինամիկան ժամանակի ընթացքում, որը համակարգի՝ հավասարակշռության վիճակին մոտենալիս լավ համապատասխանության մեջ է գտնվել տեսական արդյունքների հետ:

Առանցքային բառեր. էվոլյուցիոն մոդելներ, կենսունակության բաշխում, գենոմային շղթա, հավանականություն:

РЕШЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ С РЕКОМБИНАЦИЕЙ И ЧАСТИЧНОЙ НЕЙТРАЛЬНОСТЬЮ В УСТОЙЧИВОМ СОСТОЯНИИ

М. Казарян

Исследована эволюционная модель с рекомбинацией и частичной нейтральностью, состоящая из двублочных геномных последовательностей, для описания которой введено двумерное распределение жизнеспособности (fitness). В нашей модели центральная геномная цепь и некоторые цепи-мутанты из ее соседнего хеммингова класса имеют высокую жизнеспособность A, а все остальные цепи имеют нулевую жизнеспособность. Эта модель решена нами в устойчивом состоянии с точностью $1/L$ -го порядка, где L - длина цепей. Произведен численный расчет динамики модели во времени, результаты которого при сближении системы к устойчивому состоянию хорошо согласуются с теоретическими результатами.

Ключевые слова: эволюционные модели, распределение жизнеспособности, геномная цепь, вероятность.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

★ ★ ★

«Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական ժողովածուն լուսաբանում է բարձրագույն և հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը: Ժողովածուում տպագրվում են հանրապետության բուհերի, հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների, մասնագետների՝ այդ ուղղությամբ կատարած հետազոտությունները, մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում ստացված ժամանակակից արդյունքները: Ժողովածուն նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, հայցորդների, ուսուցիչների, դասախոսների համար:

Հոդվածները կարող են ներկայացվել հայերեն, ռուսերեն, անգլերեն լեզուներով:

★ ★ ★

Научно-методический сборник «Математика в высшей школе» освещает актуальные вопросы преподавания математики в общеобразовательной и высшей школе. В сборнике печатаются современные результаты, полученные в разных областях математики, а также исследования в этом направлении, сделанные специалистами, преподавателями вузов республики, учителями общеобразовательных школ. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, соискателей, учителей, преподавателей вузов.

Статьи могут быть представлены на армянском, русском, английском языках.

★ ★ ★

Guidance collection «Mathematics in high school» covers modern basic questions of teaching mathematics in general educational and high school. Results received nowadays in different fields of mathematics as well as researches in this direction made by specialists, lecturers of Higher Educational Institutions of the republic and teachers of general educational schools are published here. The collection is designed for students, post-graduate students, competitors, teachers, lecturers.

Articles can be submitted in Armenian, Russian, English.

ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ՊԱՀԱՆՋՆԵՐԸ

Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Տեքստի տառատեսակը՝ Sylfaen, տառաչափը՝ 10pt, տողերի հեռավորությունը՝ 1 տող, էջի ֆորմատը՝ A4 (210×297մմ), լուսանցքները. վերևից՝ 5սմ, ներքևից՝ 5,1սմ, ձախից՝ 5,75սմ, աջից՝ 1,75սմ:

Հոդվածի վերնագիրը տրվում է գլխատառերով, մեջտեղում, **bold**, 12pt տառաչափով, իսկ հեղինակի(ների) Ա. Հ. Ազգանունը(ները)՝ փոքրատառերով, միայն սկզբնատառերը՝ մեծատառ, ***bold Italic***, 11pt տառաչափով:

Համառոտագրերը տրվում են երեք լեզուներով, 9pt տառաչափով, 5-6 առանցքային բառերով:

Բոլոր բանաձևերը և մաթեմատիկական արտահայտությունները տրվում են MathType (Euclid10.eqp) կամ Microsoft Equation 4.0, *Italic*, 10pt տառաչափով: Հիմնական բանաձևերը ներկայացվում են առանձին տողով, մեջտեղում և համարակալվում են նույն էջի անկյունում՝ փակագծերի մեջ:

Օգտագործված գրականությունը համարակալվում է ըստ հղումների հերթականության՝ [1],[2],… տեսքով: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը չպետք է գերազանցի 10 էջը: Տեքստի վերջում տրվում են հոդվածի ներկայացման ամսաթիվը և տարեթիվը:

Հոդվածը գրախոսվում է:

Վերոհիշյալ պահանջները բավարարող հոդվածը (2 օրինակ) և հոդվածի ֆայլը՝ գրված Microsoft Office Word (*.doc կամ *.docx) ֆորմատով, ներկայացվում է ժողովածուի պատասխանատու քարտուղարին: Խմբագրական խորհուրդն իրավունք ունի վերջնական խմբագրման ենթարկել հոդվածները: Խորհրդի կողմից հրատարակման չերաշխավորվելու դեպքում հոդվածը չի վերադարձվում:

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи представляются на армянском, русском или английском языках. Объем статьи не должен превышать 10 печатных страниц. Шрифт – Sylfaen, размер шрифта – 10pt, межстрочный интервал – 1. Формат страницы – A4 (210 × 297мм). Поля: сверху – 5см, снизу – 5.1 см, слева – 5.75см, справа – 1.75см. Название статьи набирается заглавными буквами, выравнивание по центру, шрифт: **bold**, размер шрифта – 12pt. И.О.Фамилия автора(ов) набирается строчными буквами, шрифт: ***bold italic***, размер шрифта – 10pt. Аннотация представляется на трех языках, размер шрифта – 9pt. 5–6 ключевых слов также на трех языках. Все формулы и математические выражения набираются редактором MathType (Euclid10.eqp) или Microsoft Equation 4.0, *italic*, размер шрифта – 10pt. Формулы набираются с новой строки в центре, номер формулы ставится в конце строки, в скобках. Цитированная литература нумеруется по порядку ссылки в статье, в квадратных скобках ([1],[2],...). В конце статьи пишется дата (число/месяц/год) представления статьи. Статья в двух экземплярах и файл статьи в формате Microsoft Office Word (*.doc или *.docx) представляется ответственному секретарю. **Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.** Представленные статьи рецензируются. Отклоненные редакционным советом статьи не возвращаются. Редакционный совет оставляет за собой право окончательного редактирования статьи.

ARTICLE DESIGNING GUIDELINES

Articles may be presented in the Armenian, Russian or English languages. The whole size of an article should not exceed 10 printed pages. Font - Sylfaen, font size - 10pt, line spacing - 1. Paper size - A4(210 × 297mm), margins: top - 5sm, bottom- 5.1sm, left - 5.75sm, right - 1.75sm. The name of article is typed in block letters, alignment on the center, font style - **bold**, the size - 12pt. Initials of the author(s) are typed by lower case letters, font style - ***bold italic***, the size - 10pt. The abstracts are presented on three languages, with 5-6 keywords, font size 9pt. All formulas and mathematical expressions should be typed by MathType (Euclid10.eqp) or Microsoft Equation editor, font style – *italic*, the size – 10pt. Basic formulas are typed since a new line in the center. The number of the formula is put in the end of a line, in brackets. The references are numerated in square brackets ([1],[2],...) in order of occurrence in the article. In the end of article the date (number/month/year) of submission of the article should be written. Articles, printed in 2 copies with the file written in Microsoft Office Word (*.doc or *.docx) format, should be submitted to the responsible secretary. **Articles issued without observance of these rules, return without consideration**. Presented articles are reviewed. Articles rejected by the editorial board do not return. The editorial board reserves the right to the final edition of the article.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ԳԻՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՀԱՏՈՐ 10 № 1

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ И МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ

ТОМ 10 № 1

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

COLLECTION OF SCIENTIFIC AND METHODICAL ARTICLES

VOLUME 10 № 1

Խմբագիրներ՝
Ժ.Ս. Սեյրանյան
Ն. Յ. Պետրոսյան

Տեխնիկական խմբագիր
Ա.Ս. Տոնոյան

տորագրված է տպագրության՝ 15.11.07թ.: Տպագրությունը՝ փոքր օֆսեթ: Ֆորմատ՝ (70x100) 1/16: Թուղթը՝ «օֆսեթ»: 5 տպ. մամ.:
Պատվեր՝ ???980 Տպաքանակ՝ 120

Տպագրված է Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարանի տպարանում

Երևան, Տերյան 105