ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ՀԱՏՈՐ 11 № 3

«ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ»
ԵՐԵՎԱՆ 2015

Ընդգրկված է Հայաստանի Հանրապետության Բարձրագույն որակավորման հանձնաժողովի (ՀՀ ԲՈՀ) կողմից ընդունված թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունների արդյունքների տպագրման համար ընդունելի պարբերականների ցանկում՝ «Մաթեմատիկա» և «Մանկավարժություն» մասնագիտությունների համար 23.03.2007:

ՀՏԴ 51

ԳՄԴ 22.1

Մ 151 **Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում:** - Եր.: ՀԱՊՀ «Ճարտարագետ» հրատ., 2015.- Հատոր 11, № 3.- 60 էջ:

Խմբագրության հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան 105, ՀԱՊՀ, մասնաշենք 12, սենյակ 12202

Հեռ.: +(37410) 56-28-82

E-mail: mathdep@seua.am

Web: www.math.seua.am

facebook www.facebook.com/pages/Mathematics-in-High-School/339572519477837

ISSN 1829-3344

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF REPUBLIC OF ARMENIA
NATIONAL POLYTECHNIC UNIVERSITY OF ARMENIA

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОМ 11 № 3

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

VOLUME 11 № 3

«ЧАРТАРАГЕТ»
ЕРЕВАН 2015

«TCHARTARAGET»
YEREVAN 2015

Включен в список периодических изданий, допустимых для публикования результатов кандидатских и докторских диссертаций по специальностям: “Математика” и “Педагогика”, принятых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Республики Армения (23.03.2007).

УДК 51
ББК 22.1
М 151 **Математика в высшей школе.**– Ереван: Изд-во НПУА “Чартарагет”, 2015. - Том 11, №3.– 60с.

Адрес редакции: 0009, Ереван, ул. Теряна 105, НПУА, корпус 12, комната 12202.
Телефон: +(37410) 56-28-82. **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

---

It is included in the accepted by the Highest Certifying Commission of Armenia (HCC) list of periodicals admissible for publications of the results of PhD and Doctoral theses by specialties Mathematics and Pedagogy (23.03.2007).
UDC 51
LBC 22.1
M 151 **Mathematics in Higher School.** - Yerevan: NPUA “Tchartaraget” Publishing House.- 2015.- Volume 11, №3.- 60p.

Address: 0009, Yerevan, 105 Teryan, NPUA, bld. 12, room 12202.
Tel: +(37410) 56-28-82, **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

ISSN 1829-3344

ՀՏԴ 514.112.6; 514.174.2

ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆՆԵՐ ԵՎ ԽՄԲԵՐԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա.Հ. Առաքելյան, Ա.Ա. Հարությունյան

(Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան)

E-mail: armarakelyan@seua.am

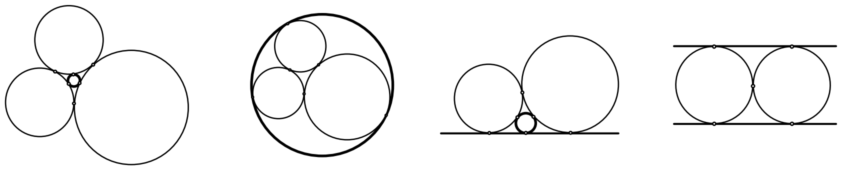
Չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների $\mathbb{M}_D$ բազմությունը նկարագրվում է 4×4 չափանի այնպիսի $\mathbf{W}$ մատրիցների միջոցով, որ $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{Q}_W$, որտեղ $\mathbf{Q}_D$-ն և $\mathbf{Q}_W$-ն համապատասխանաբար $Q_D = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$ և $Q_W = -8x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$ քառակուսային ձևերի մատրիցներն են: Ապացուցվում է, որ $Aut(Q_D)$ խումբը $\mathbb{M}_D$ բազմության վրա ազդում է տրանզիտիվորեն: Դիտարկվում են $Aut(Q_D)$ խմբի որոշ տարրերի գործողությունների երկրաչափական մեկնաբանություններ:

Առանցքային բառեր. դեկարտյան կոնֆիգուրացիա, խմբերի գործողություններ, Լորենցի խումբ:

1°. ԴԵԿԱՐՏԻ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ԽՄԲԵՐԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: Նկար 1-ում պատկերված չորս միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող C_j, $j = \overline{1,4}$ շրջանագծերի դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիաների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը՝

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} \beta_i\right)^2, \tag{1}$$

որտեղ $b_j = r_j^{-1}$-ը՝ C_i շրջանագծի կորությունն է [1,2]:



Նկ.1. Միմյանց զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ

Եթե դիտարկենք $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^{\mathrm{T}}$ կորությունների վեկտորը, ապա (1) բանաձևը կարելի է արտահայտել հետևյալ մատրիցային տեսքով՝

$$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Q}_D \boldsymbol{\beta} = 0\,,$$

որտեղ

$$\mathbf{Q}_D := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցը

$$Q_D = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$$

դեկարտյան քառակուսային ձևի մատրիցն է:

Աշխատանք [3]-ում Դեկարտի (1) առնչությունը ընդհանրացվում է այնպես, որ այն իր մեջ ընդգրկում է ոչ միայն կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի կորությունները, այլև նրանց երկրաչափական դիրքերը: Դիցուք, D -ն՝ β_i, $i = \overline{1,4}$ կորություններով և $O_i\left(x_i, y_i\right)$, կենտրոններով C_i շրջանագծերի դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա է: Սահմանենք կոորդինատների հետևյալ մատրիցը՝

$$\mathbf{W}_D := \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & \beta_1 & \beta_1 x_1 & \beta_1 y_1 \\ \overline{\beta}_2 & \beta_2 & \beta_2 x_2 & \beta_2 y_2 \\ \overline{\beta}_3 & \beta_3 & \beta_3 x_3 & \beta_3 y_3 \\ \overline{\beta}_4 & \beta_4 & \beta_4 x_4 & \beta_4 y_4 \end{pmatrix},$$

որտեղ $\overline{\beta}_i$-ն՝ միավոր շրջանագծի նկատմամբ շրջանագծի նկատմամբ C_i շրջանագծի ինվերսիայի արդյունքում ստացված շրջանագծի կողմնորոշված կորությունն է:

Թեորեմ 1 (Դեկարտի ընդլայնված): Տրված D դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիայի համար կառուցված W մատրիցի համար ճիշտ է հետևյալ մատրիցային հավասարումը՝

$$\mathbf{W}_D^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_D \mathbf{W}_D = \mathbf{Q}_W, \tag{2}$$

որտեղ $\mathbf{Q}_W = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$-ն $Q_W = -8x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$ ձևի մատրիցն է:

Ճիշտ է նաև թեորեմի հակադարձ պնդումը. (2) հավասարման ցանկացած իրական լուծում որոշում է միակ դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա:

Պարզ է, որ թեորեմը հաստատում է փոխադարձ կապ՝ դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների $\mathbb{M}_D$ բազմության և (2) հավասարման $\mathbf{W} = \mathbf{W}_D$ իրական լուծումների միջև: Իր հերթին, (2) հավասարման համաձայն, դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի կոորդինատների մատրիցը հաստատում է արտապատկերում

Q_D և Q_W քառակուսային ձևերի միջև: Կարելի է նկատել, որ այս երկու ձևերը համարժեք են $Q_L(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ Լորենցի քառակուսային ձևին հետևյալ մատրիցով՝ $\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: Իսկապես, ունենք՝

$$\mathbf{Q}_D = \mathbf{J}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_L \mathbf{J}_0, \qquad \mathbf{Q}_W = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_L \mathbf{A}, \tag{3}$$

որտեղ $\mathbf{J}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}_0^{-1}$ և

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_0 \mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}: \tag{4}$$

$\mathbf{Q}_D$ և $\mathbf{Q}_W$ մատրիցների դետերմինանտների համար, $(3)-(4)$ հավասարումներից, ստանում ենք $\det \mathbf{Q}_D = \det \mathbf{Q}_L = -1$, $\det \mathbf{Q}_W = -64$, վերջիններս տեղադրելով (2)-ի մեջ, կստանանք՝ $\det \mathbf{W}_D = \pm 8$.

Կամայական Q քառակուսային ձևի համար ներմուծենք ավտոմորֆիզմների հետևյալ խումբը՝

$$Aut(Q) = \{\mathbf{U} \in GL(4,\mathbb{R}) \mid \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{Q}\},$$

որտեղ՝ $\mathbf{Q}$-ն Q քառակուսային ձևի սիմետրիկ մատրիցն է: Համաձայն այս սահմանման Լորենցի քառակուսային ձևի ավտոմորֆիզների $Aut(Q_L)$ խումբը $O(3,1)$ Լորենցի խումբն է: Դիտարկենք ավելի մանրամասն $Aut(Q_D)$ խումբը: Ինչպես ցույց կտրվի հաջորդ թեորեմում, $Aut(Q_D)$ խմբի գործողությունը ձախից կամայական դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիայի վրա ծնում է նոր դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա, սակայն, խմբի գործողությունը կոնֆիգուրացիաի առանձին շրջանների նկատմամբ երկրաչափական իմաստ չունի:

Թեորեմ 2:

ա) $Aut(Q_D)$ խումբը համալուծ է $Aut(Q_L) \equiv O(3,1)$ խմբին:

բ) $Aut(Q_D)$ խումբը բոլոր կողմնորոշված դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների $\mathbb{M}_D$ բազմության վրա ազդում է տրանզիտիվորեն: Երկու տարբեր D և D_1 դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների համար գոյություն ունի այնպիսի $\mathbf{U} \in Aut(Q_D)$

միակը, որ $\mathbf{UW}_D = \mathbf{W}_{D_1}$ ։

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: ա) Առաջին մասը անմիջականորեն բխում է Դեկարտի և Լորենցի ձևերի համալուծությունից՝ (3), որտեղից՝

$$Aut(Q_D) = \mathbf{J}_0^{-1} Aut(Q_L)\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0^{-1} O(3,1)\mathbf{J}_0 \ ։$$

բ) Համոզվենք, որ $Aut(Q_D)$ խմբի գործողությունը ձախից $\mathbb{M}_D$ ի վրա ստեղծում է նոր դեկարտյան կողմնորոշված կոնֆիգուրացիա: Դիցուք, $\mathbf{W} \in \mathbb{M}_D$, այսինքն՝

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{Q}_W \ ։ \tag{5}$$

Կամայական $\mathbf{U} \in Aut(Q_D)$ -ի համար ունենք $\mathbf{U}^T\mathbf{Q}_D\mathbf{U} = \mathbf{Q}_D$, ուստի՝

$$(\mathbf{UW})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{UW} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{UW} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{Q}_W,$$

այսինքն՝ $\mathbf{UW} \in \mathbb{M}_D$ ։ Որպեսզի ապացուցենք $Aut(Q_D)$ խմբի գործողության տրանզիտիվությունը, ֆիքսենք $\mathbf{W}_D$-ն և վերցնենք $\mathbf{U} \equiv \mathbf{WW}_D^{-1}$. Պարզ է, որ կամայական $\mathbf{W} \in \mathbb{M}_D$-ի համար $\mathbf{UW}_D = \mathbf{W}$ ։ Ցույց տանք, որ $\mathbf{U} \in Aut(Q_D)$ ։ Առնչություն (5)-ից ունենք՝

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{W}_D^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W}_D \ (= \mathbf{Q}_W),$$

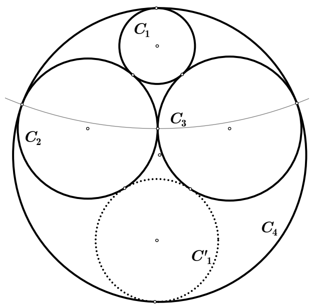
որտեղից՝

$$(\mathbf{W}_D^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{WW}_D^{-1} = (\mathbf{WW}_D^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{WW}_D^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{U} = \mathbf{Q}_D,$$

այսինքն՝ $\mathbf{U} \in Aut(Q_D)$ ։ Պարզ է, որ $\mathbf{W} \to \mathbf{WW}_D^{-1}$ արտապատկերումը՝ $\mathbb{M}_D$-ից $Aut(Q_D)$-ի վրա, միարժեք է, քանի որ $\mathbf{W}_D$-ն հակադարձելի է: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Թեորեմից հետևում է $\mathbb{M}_D = Aut(Q_D)\mathbf{W}$ ներկայացումը: Նշենք, որ համաձայն (3)-ի, $\mathbb{M}_D$-ի վրա $Aut(Q_D)$ խմբի գործողությունը ձախից կարելի է նույնականացնել Լորենցի $Aut(Q_L) \equiv O(3,1)$ խմբի $\mathbb{M}_D$-ի վրա ձախից գործողության հետ:

2°. $\mathbf{Aut(Q_D)}$ խմբի տարրերը: Դիտարկենք $Aut(\mathrm{Q}_D)$ խմբի որոշ տարրեր, որոնց գործողությունները դեկարտյան կոնֆիգուրացիաների վրա ունեն հետաքրքիր երկրաչափական մեկնաբանություններ: Առաջին տիպի տարրերին համապատասխանում են D կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի շոշափման երեք կետերով որոշվող շրջանագծերի նկատմամբ ինվերսիայի օպերացիաները: Քանի որ D-ն բաղկացած է զույգ առ զույգ շոշափող չորս շրջանագծերից, ապա հնարավոր են չորս այդպիսի ինվերսիաներ: Ինվերսիաներից յուրաքանչյուրը, որոնց կանվանենք արտապատկերման օպերատորներ, ֆիքսում է նախնական երեք շրջանագծերը և տեղափոխում է չորրորդ շրջանագիծը մեկ այլ (միակ) շրջանագծի, որը նույնպես շոշափվում է երեք նախնականներին: Նշանակենք $s_1 = s_1[D]$-ով Մոբիուսի այն ձևափոխությունը, որը C_1 շրջանագիծը տեղափոխող արտապատկերող օպերատորն է: Մասնավորապես, s_1-ը արտապատկերում է $D=(C_1,C_2,C_3,C_4)$ դեկարտյան կոնֆիգուրացիան $s_1(D)=(C'_1,C_2,C_3,C_4)$ դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի (նկ.2):



Նկ. 2. s_1 արտապատկերող օպերատորի երկրաչափական գործողությունը

Պարզ է, որ արտապատկերման օպերատորը կախված է դեկարտյան կոնկրետ կոնֆիգուրացիայից, սակայն բոլոր դեկարտյան D կոնֆիգուրացիաների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը՝

$$\mathbf{W}_{s_1(\mathrm{D})} = \mathbf{S}_1\mathbf{W}_D\,, \tag{6}$$

որտեղ $\mathbf{S}_1 \in Aut(\mathrm{Q}_D)$ և $\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

Հարկ է նշել, որ $\mathbf{S}_1$-ն կախված չէ D կոնֆիգուրացիայից: Մնացած երեք s_j, $j\in\{2,3,4\}$ երկրաչափական օպերացիաներն ունեն նմանատիպ $\mathbf{S}_j$ մատրիցներ, որոնք ստացվում են $\mathbf{S}_1$-ից՝ առաջին և j-րդ սյուների տեղափոխությամբ:

Ապացուցելու համար (6)-ը բավական է համոզվել, որ $\mathbf{S}_1 \in Aut(\mathrm{Q}_D)$: Ուստի, թեորեմ 2-ի համաձայն, $\mathbf{S}_1\mathbf{W}_D = \mathbf{W}_{D'}$, որտեղ D' դեկարտյան կոնֆիգուրացիայում երեք շրջանագծերն ու նրանց կողմնորոշումները ժառանգված են նախնական D կոնֆիգուրացիայից, իսկ չորրորդ շրջանագիծը փոխարինված է միակ այլ շրջանագծով, որը շոշափվում է այդ երեք շրջանագծերին և ունի դրանցով միարժեքորեն որոշվող կողմնորոշում:

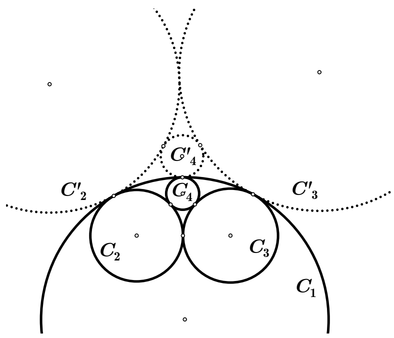
$Aut(\mathrm{Q}_D)$ խմբի տարրերի երկրորդ տիպին համապատասխանում են դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերից մեկի նկատմամբ ինվերսիայի օպերատորները: Ֆիքսենք C_1 շրջանագիծը և նրա նկատմամբ ինվերսիայի օպերատորը նշանակենք

$s_1^{\perp}$ -ով: Պարզ է, որ $s_1^{\perp}$ գործողության արդյունքում C_1 շրջանագիծը կմնա անշարժ, այն դեպքում երբ մնացած երեքը կփոփոխվեն: Հեշտ է ցույց տալ, որ

$$\mathbf{W}_{s_1^{\perp}(\mathrm{D})} = \mathbf{S}_1^{\perp}\mathbf{W}_D, \tag{7}$$

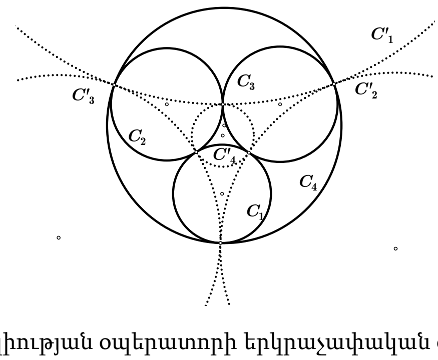
որտեղ $\mathbf{S}_1^{\perp} \in Aut(\mathrm{Q}_D)$ -ն ունի հետևյալ տեսքը՝ $\mathbf{S}_1^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:.

Մնացած երեք $s_j^{\perp}$, $j \in \{2,3,4\}$ օպերատորներն ունեն նմանատիպ $\mathbf{S}_j^{\perp}$ մատրիցներ, որոնք ստացվում են $\mathbf{S}_1^{\perp}$ -ից առաջին և j -րդ սյուները տեղափոխությամբ: $s_1^{\perp}$ երկրաչափական օպերատորի գործողությունը ցույց է տրված նկ. 3-ում:



Նկ. 3. $s_1^{\perp}$ արտապատկերող օպերատորի երկրաչափական գործողությունը

Հաջորդ օպերատորը, որը կանվանենք *երկակիության օպերատոր*, արտապատկերում է տրված D դեկարտյան կոնֆիգուրացիան մեկ այլ D' դեկարտյան կոնֆիգուրացիայի, որտեղ յուրաքանչյուր շրջանագիծ անցնում է նախնական կոնֆիգուրացիայի շրջանագծերի շոշափման կետերի եռյակով, որոնք չեն գտնվում մի շրջանագծի վրա (նկ. 4):



Նկ. 4. δ երկակիության օպերատորի երկրաչափական գործողությունը

Նշենք, որ D' կոֆիգուրացիայի շրջանագծերը ուղղահայաց են D-ի շրջանագծերին իրենց հատման կետերում: Նախորդ դեպքերի կարելի է ցույց տալ, որ $W_{D'} = \mathrm{D}\,W_D$, որտեղ $\mathrm{D}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

Նկատենք, որ $\mathrm{D} = -Q_D \in Aut(Q_D)$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Descartes R. *Oeuvres de Descartes* // Correspondance IV /C. Adam and P. Tannery, Eds.- Paris: Leopold Cerf, 1901.
2. Закарян В.С., Аракелян А.Г. *О последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос* // Потенциал: Математика, Физика, Информатика.- 2011.-№10.-С. 29-35.
3. Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R. Beyond the Descartes Circle Theorem // American Mathematical Monthly.- 2002.-109(4).-P. 338-361.

Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 12.11.2015:

ДЕКАРТОВЫ КОНФИГУРАЦИИ И ДЕЙСТВИЯ ГРУПП

А.Г. Аракелян, А.А. Арутюнян

Рассматриваются всевозможные конфигурации *Декарта* четырех попарно соприкасающихся кругов, с непересекающимися внутренностями. Множество $\mathbb{M}_D$ всех таких конфигураций описывается через системы координат, состоящие из 4×4 матриц $\mathbf{W}$ таких, что $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{Q}_W$, где $\mathbf{Q}_D$ и $\mathbf{Q}_W$ - матрицы квадратичных форм Декарта и Вилкера соответственно. Доказывается, что группа $Aut(Q_D)$ действует транзитивно на множестве $\mathbb{M}_D$.

Ключевые слова: декартовы конфигурации, действия групп, группа Лоренца.

DESCARTES CONFIGURATION AND GROUP ACTIONS

A.H. Arakelyan, A.A. Haroutyunyan

All possible Descartes configurations of four mutually tangent circles with disjoint interiors are considered. The set $\mathbb{M}_D$ of all Descartes configurations is described using a coordinate system consisting of such 4×4 real matrices $\mathbf{W}$ that $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_D\mathbf{W} = \mathbf{Q}_W$, where $\mathbf{Q}_D$ and $\mathbf{Q}_W$ are matrices of Descartes and Wilker quadratic forms. We prove that the group $Aut(Q_D)$ acts transitevely on $\mathbb{M}_D$.

Keywords: Descartes configurations, group action, Lorentz group.

УДК 517.51

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДКЛАССОВ

И.В. Оганисян

(Национальный политехнический университет Армении)

E-mail: ishkhanh@gmail.com

Рассмотрены вопросы точности известных оценок для тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ и его специальных подклассов ограниченных функций класса $A_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$.

Ключевые слова: классы Островского и Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, произведения Бляшке и М.М. Джрбашяна.

Классам аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимают введенные М.М. Джрбашяном общеизвестные классы $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, обладающие свойством

$$A_\alpha\subset A_0\ \left(-1<\alpha<0\right),$$

$$A_0\subset A_\alpha\ \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

где $A_0\equiv A$ - известный класс Островского.

Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны [1,2], класс A аналитических в круге $\left|z\right|<1$ функций, для которых

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty,$$

совпадает с множеством функций $f\left(z\right)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f\left(z\right)=e^{i\alpha}z^\lambda B\left(z\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\psi\left(\theta\right)\right\},\ \left|z\right|<1,$$

где $\alpha\left(\operatorname{Im}\alpha=0\right)$ - постоянная; $\lambda>0$ - целое число; $B\left(z\right)$ - функция Бляшке:

$$B\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\frac{\left|z_k\right|}{z_k}, \tag{1}$$

$\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$.

Для функции класса A Мергеляном С. Н. [3] получена оценка тейлоровских коэффициентов

$$|a_n| \le \exp\left\{2\sqrt{cn}\left(1+o(1)\right)\right\}, n\to\infty . \tag{2}$$

Обозначим через $A_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\}<+\infty ,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|=\begin{cases}D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|, & D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\ge 0,\\ 0, D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\le 0,\end{cases}$$

$D^{-\alpha}$ - интегрально-дифференциальный оператор произвольного порядка в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке, который определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}f(r), (-1<\alpha<0).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r)\equiv f(r).$$

Напомним основную теорему М.М. Джрбашяна о факторизации классов A_α: класс $A_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z)=Cz^\lambda B_\alpha(z;z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\}, \tag{3}$$

где C - постоянная; λ - целое число, $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$,

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}.$$

$B_\alpha\left(z;z_k\right)$ - сходящиеся в круге $\left|z\right|<1$ произведения Джрбашяна:

$$B_\alpha\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha\left(z;z_k\right)},$$

где

$$W_\alpha\left(z;\xi\right)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{\left(1-x\right)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+\alpha+k\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1+k\right)}\times$$

$$\times\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\xi|}\left(1-x\right)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\zeta}^k\int_{|\xi|}^{1}\left(1-x\right)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left|z_k\right|\right)^{1+\alpha}<+\infty\,. \tag{4}$$

С.С. Степаняном [4] получена неулучшаемая оценка тейлоровских коэффициентов для функций классов $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$:

$$\left|a_n\right|\le\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha\left(1+\alpha\right)n^{1+\alpha}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right\},\quad n\to\infty\,, \tag{5}$$

которая при значении параметра $\alpha=0$ совпадает с оценкой (2).

Обозначим через $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ множество тех функций из A_α , в представлении (3) которых функция $\psi\left(\theta\right)$ невозрастающая.

Классы $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<0\right)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций класса A_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна более точная оценка [5]:
если функция

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad\left|z\right|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, то имеет место оценка

$$\left|a_n\right|=O\left(n^\alpha\right),\ \ n\to\infty\,. \tag{6}$$

Так как

$$A_\alpha^*\subset A_\alpha\subset A,\ \ -1<\alpha<0\,,$$

то оценка (2) верна также для функций классов $A_\alpha\left(-1<\alpha\le\infty\right)$ и $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, а оценка (5) верна для функций классов $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, которые, естественно, не могут быть точными.

В работе $[6]$ доказана следующая теорема.

Теорема А. При условии

$$\sum\left(1-\left|z_k\right|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha<0$$

имеет место представление

$$B_\alpha\left(z,z_k\right)=B\left(z,z_k\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega\left(\theta\right)\right\},$$

где $\omega\left(\theta\right)$ - некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $\left[0;2\pi\right]$.

М.М. Джрбашяном $[7]$ доказана также следующая теорема.

Теорема В. Для того, чтобы функция Бляшке $B\left(z\right)$ принадлежала классу $A_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ необходимо и достаточно выполнение условия (4).

Следующая теорема $[8]$ распространяет указанную оценку С.С. Степаняна на все значения параметра $\alpha\in\left(-1;+\infty\right)$.

Теорема С. Если функция

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ \left|z\right|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, то имеет место следующая оценка:

$$\left|a_n\right|\le\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha\left(1+\alpha\right)n^{1+\alpha}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right\},\quad n\to+\infty, \qquad (7)$$

где c_α - некоторая положительная константа.

А в работе $[4]$ доказана следующая лемма.

Лемма. Для функции

$$F_\alpha\left(z\right)=\exp\left\{\frac{c}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(\alpha)}z^n,\ \left|z\right|<1,\ c>0$$

класса $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ справедлива оценка

$$b_n^{(\alpha)}=\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha\left(1+\alpha\right)n^{1+\alpha}}\left(1+o\left(1\right)\right)\right\},\quad n\to+\infty.$$

Основные результаты. Из приведенной леммы непосредственно следует теорема.

Теорема 1. Оценка (7) неулучшаемая, если $\alpha\in\left(-1;+\infty\right)$.

Далее доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. Если множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ при $-1<\alpha<0$ удовлетворяет условию (4), то для произведения Бляшке

$$B(z,z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1$$

справедлива оценка

$$|a_n|=O(n^\alpha),\ \ n\to\infty\,.$$

Следствие. Из теоремы А следует, что при условии (4) $B(z,z_k)\in A_\alpha\setminus A_\alpha^*,\ \alpha\in(-1;0)$, но имеет место оценка (6). Так что оценка (6) является только необходимым условием для того, чтобы функция класса $A_\alpha\,(-1<\alpha<0)$ принадлежала подклассу $A_\alpha^*\,(-1<\alpha<0)$.

Теорема 3. Существуют произведения Бляшке, не принадлежащие ни одному классу $A_\alpha\left(-\frac{3}{4}<\alpha<0\right)$, тейлоровские коэффициенты которых имеют порядок $O(n^\alpha)$.

Следствие. Из теоремы В следует, что в рассмотренном случае $B\in A\setminus A_\alpha$, $-\frac{3}{4}<\alpha<0$, но имеет место оценка (6). Так что оценка (6) является только необходимым условием для того, чтобы функция класса $A\setminus A_\alpha\left(-\frac{3}{4}<\alpha<0\right)$ принадлежала подклассу A_α^*, $-\frac{3}{4}<\alpha<0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*.- М.: Наука, 1966.- 672 с. (гл. IX).
2. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции*. - М.: Госиздат, 1941.
3. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций*.- 2-е изд.- М.-Л., 1950.- 336 с.
4. Степанян С. С. *О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса* A_α // ДАН АрмССР.- 1982.- Т. 75, № 3.- С. 107-113.
5. Оганисян И.В. *Об одном представлении функций класса* $N_\alpha\,(-1<\alpha\le 0)$ *М.М. Джрбашяна* // ДАН АрмССР. -1989.- Т. 88, № 2.- С. 55-60.
6. Джрбашян М.М., Захарян В.С. *О факторизации функции* $B_\alpha(z)$ // Матем. заметки.- 1968.- Т.4, вып. 1.- С. 3-10.

7. Джрбашян М.М. *Об одном свойстве функций Бляшке* // ДАН СССР.- 1967.- 175, № 5.- С. 981-984.
8. Оганисян И.В. *О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса* $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ // ДАН АрмССР. - 2015. -Т. 115, № 4. -С. 261-265.

Материал поступил в редакцию 02.11.2015

$A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ ԴԱՍԻ ԵՎ ՆՐԱ ՈՐՈՇ ԵՆԹԱԴԱՍԵՐԻ ԹԵՅԼՈՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Դիտարկվում է $A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ դասի և նրա սահմանափակ ֆունկցիաների առանձնահատուկ ենթադասի՝ $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$ ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար հայտնի գնահատականների ճշգրտությունը:

Առանցքային բառեր: Օստրովսկու և Ջրբաշյանի դասեր, Թեյլորի գործակիցներ, Բլյաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալներ:

ON THE ACCURACY OF SOME ESTIMATION FOR TAYLOR COEFFICENTS OF FUNCTIONS OF CLASSES $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ AND SOME ITS SUBCLASSES

I.V. Hovhannisyan

We consider the accuracy for taylor coefficients of functions of classes $A_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ and $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$ - special subclasses of bounded functions of class $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$.

Keywords: classes of Ostrovski and Djrbashyan, Taylor coefficients, Blashke and Djrbashyan products.

УДК 517. 948

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ ШАУДЕРА

Т.М. Григорян, Г.Г. Казарян, А.Б. Минасян
(Ереванский государственный университет)
E-mail: t.grigoryan@ysu.am

Существует двойной ряд по системе Фабера-Шаудера вида $\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y)$, при котором ненулевые члены в последовательности $\{|a_{k,n}|\}_{k,n=0}^{\infty}$ по всем направлениям сходятся к нулю и который является универсальным рядом во всех пространствах $L^p_{[0,1]^2}$.

Ключевые слова: система Фабера-Шаудера, сходимость, универсальный ряд.

Сначала напомним определение системы Фабера-Шаудера (см. [1]). Это система функций $\Phi = \left\{\phi_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in \left[0,1\right]$, в которой $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$; $k = 0,1,...;\ i = 1,2,...,2^k$:

$$\phi_n\left(x\right) = \phi_k^{(i)}\left(x\right) = \begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right) \\ 1,\ \textit{если}\ x = x_n = x_k^{(i)} = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}} \\ \textit{линейна и непрерывна на}\ \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Индекс k называется рангом функции $\phi_k^{(x)}(x)$. Напомним, что система Фабера-Шаудера – базис в пространстве $C_{[0,1]}$, при этом в разложении непрерывной функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\phi_n(x)$. (Об интересных свойствах этой системы см. [2-7]).

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. Существует двойной ряд по системе Фабера-Шаудера вида $\sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y)$, ненулевые члены в последовательности $\left\{\left|a_{k,n}\right|\right\}_{k,n=0}^{\infty}$ по всем направлениям сходятся к нулю, который является универсальным рядом во всех пространствах $L^p_{[0,1]^2}$, т.е. для любого $p > 1$ и для каждой функции $f\left(x,y\right) \in L^p_{[0,1]^2}$ из ряда $\sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y)$ можно выделить частичный ряд, который сходится к $f\left(x,y\right)$ в $L^p_{[0,1]^2}$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Отметим, что эта теорема является двумерным аналогом одной теоремы Ульянова (см. [8]).

Мы будем пользоваться леммой 2 работы [8].

Лемма . Пусть даны двоичный интервал $\Delta = \Delta_p^{(i)} = \left(\dfrac{i-1}{2^p}, \dfrac{i}{2^p}\right) \left(i \in \left[1, 2^p\right]\right)$ и числа $\gamma \neq 0,\, N_0 > 1 \left(N \in \mathrm{N}\right), 0 < \varepsilon < \left|\Delta\right|$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ с мерой $\left|E\right| > \left|\Delta - \varepsilon\right|$ и полином

$$Q\left(x\right) = \sum_{n=N_0}^{\overline{N}} A_n \phi_n\left(x\right)$$

по системе (1) такие, что

1) $Q\left(x\right) = \begin{cases} \gamma \;\; \textit{при} \;\; x \in E, \\ 0 \;\; \textit{при} \;\; x \in \left[0,1\right] \setminus \Delta \end{cases}; \quad \left\|Q\left(x\right)\right\|_C = \left|\gamma\right|,$

2) $\left|A_n\right| \leq \varepsilon,\, \forall n \in \left[N_0, \overline{N}\right]$.

Из этой леммы вытекает:

Лемма 1. Пусть даны числа $\gamma \neq 0,\, N_0 > 1,\, \varepsilon \in \left(0,1\right)$ и интервал $\Delta \subset \left[0,1\right]$. Тогда существует полином по системе Шаудера вида $Q\left(x\right) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \phi_k\left(x\right)$, который удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 \left|Q\left(x\right) - \gamma \chi_\Delta\left(x\right)\right|^p < \varepsilon,$$

$$\max_{N_0 \leq m \leq N} \int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{m} a_k \phi_k\left(x\right)\right|^p dx \leq 2\left|\gamma\right|\left|\Delta\right|,$$

$$\left|A_n\right| \leq \varepsilon,\, \forall n \in \left[N_0, \overline{N}\right].$$

Применяя лемму 1 и повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве леммы 3 работы [9], получим доказательство леммы 2, которая формулируется следующим образом.

Лемма 2. Для любых чисел $p \in \left[0,1\right],\, N_0 > 1$ и $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f\left(x,y\right) \in L^p_{\left[0,1\right]}$ существует полином по двойной системе Шаудера вида $Q\left(x,y\right) = \sum_{k,n=N_0}^{N} a_{k,n} \phi_k\left(x\right) \phi_n\left(y\right)$, который удовлетворяет условиям

$$1)\ \int_0^1\int_0^1 \left|Q\left(x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|^p dxdy<\varepsilon,$$

$$2)\ \max_{\substack{N_0\le k<N\\ N_0\le n\le N}} \int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{m}\sum_{k=N_0}^{m} a_{k,n}\phi_k\left(x\right)\phi_n\left(y\right)\right|^p dxdy+$$

$$+\left|\max_{\sqrt{2}N_0<R\le\sqrt{2}N_k}\int_0^1\int_0^1 \sum_{2N_0\le S^2+m^2\le R^2} a_{S,m}\phi_k\left(x\right)\phi_m\left(y\right)\right|^p dxdy\le 4\int_0^1\int_0^1\left|f\left(x,y\right)\right|^p dxdy,$$

$$3)\ \left|a_{k,n}\right|\le\varepsilon,\ \forall k,n\in\left[N_0,\overline{N}\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\left\{f_k\left(x,y\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательность всех тригонометрических полиномов. Последовательно применяя лемму 1, можем найти полиномы вида

$$Q_k\left(x,y\right)=\sum\nolimits_{S,m=N_{k-1}}^{N_k-1} a_{S,m}^{(k)}\phi_S\left(x\right)\phi_m\left(y\right),\ k=1,2,...,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\int_0^1\int_0^1\left|Q_k\left(x,y\right)-f_k\left(x,y\right)\right|^p dxdy<2^{-2k},$$

$$\max_{N_{k-1}\le N,M}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{S,m=N_{k-1}}^{N,M} a_{S,m}^{(k)}\phi_S\left(x\right)\phi_m\left(y\right)\right|^p dxdy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N_{k-1}<R\le\sqrt{2}N_k}\int_0^1\int_0^1\left|\sum a_{S,m}^{(k)}\phi_k\left(x\right)\phi_m\left(y\right)\right|^p dxdy+$$

$$+\left|\max_{\sqrt{2}N_{k-1}<R\le\sqrt{2}N_k}\int_0^1\int_0^1\sum_{2N_{k-1}\le S^2+m^2\le R^2} a_{S,m}^{(k)}\phi_k\left(x\right)\phi_m\left(y\right)\right|^p dxdy<$$

$$<4\int_0^1\int_0^1\left|f_k\left(x,y\right)\right|^p dxdy,$$

$$\left|a_{S,m}^{(k)}\right|\le\varepsilon,\quad \forall S,m\in\left[N_{k-1},N_k\right],\quad k=1,2,....$$

Положим

$$\sum_{k,n=0}^{\infty}a_{k,n}\phi_k\left(x\right)\phi_n\left(y\right)=\sum_{S,m=1}^{\infty}a_{S,m}^{(k)}\phi_S\left(x\right)\phi_m\left(y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{S,m=N_{k-1}}^{N_k-1}a_{S,m}^{(k)}\phi_S\left(x\right)\phi_m\left(y\right)\right),$$

$$a_{S,m}\begin{cases}a_{S,m}^{(k)}\ \ \textit{при}\ s,m\in\left[N_{k-1},N_k\right),\ k=1,2,...,\\ 0-\textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть $p \in (0,1)$ и $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$.

Нетрудно видеть, что по индукции можно определить подпоследовательность полиномов $Q_{k,j}(x,y) = \sum_{S,m=N_{k_{j-1}}}^{N_{k_j}-1} a_{S,m}^{(k_j)} \phi_S(x) \phi_m(y)$, $j = 1,2,...$ такую, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j}(x,y) - f(x,y) \right|^p dxdy < 2^{-n},$$

$$\max_{N_{k_j-1} \le N,M} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{S,m=N_{k_j-1}}^{N,M} a_{S,m}^{(k_j)} \phi_S(x) \phi_m(y) \right|^p dxdy +$$
$$+ \max_{\sqrt{2}N_{k_j-1} < R \le \sqrt{2}N_{k_j}} \int_0^1 \int_0^1 \sum a_{S,m}^{(k_j)} \phi_k(x) \phi_m(y) dxdy +$$
$$+ \left| \max_{\sqrt{2}N_{k_j-1} < R \le \sqrt{2}N_{k_j}} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{2N_{k-1} \le S^2+m^2 \le R^2} a_{S,m}^{(k_j)} \phi_k(x) \phi_m(y) \right|^p dxdy.$$

Отсюда вытекает, что ряд

$$\sum_{S,m=1}^{\infty} a_{S,m}^{(k_j)} \phi_{Sk}(x) \phi_m(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{S,m=N_{k_{j-1}}}^{N_{k_j}-1} a_{S,m}^{(k_j)} \phi_S(x) \phi_m(y) \right)$$

сходится к $f(x,y)$ в метрике $L^p_{[0,1]^2}$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schauder J. Zur Theorie stetiger *Abbildungen in Funktional raumen //* Math. Zet.-1927.- 26:1.- P. 47–65.
2. Krotov V.G. *On the series by the Faber--Schauder system and by bases in C[0,1]//* Mat. Zamet.- 1973.-Vol. 14.-P. 185—19.
3. Григорян М.Г., Кротов В.Г. *Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера-Шаудера//* Мат. заметки.-2013.-Т. 93, No 2.- С.172-178.
4. Grigoryan M., Minasyan A. *Representation of functions in* L^1_μ, *weighted spaces by series with monotonic coefficients in the Walsh generalized system*//Applied Mathematics.-2013.- (FA).- Vol.4, No 11A.- P. 6-13.
5. Episkoposian S.A., Grigorian T.M. *A representations of functions from* L^1_μ *class by series with monotonic coefficients concerning Haar systems//*J.of the Indian Math. Soc.-2013.- Vol. 80, No 1-2.- P.57-68.
6. Ульянов П.Л. *Представление функций рядами и классы* $\varphi(L)$//УМН.- 1972.- 27:2.- С. 47-65.

7. Grigoryan M.G. and Sargsyan A.A. *Unconditional C-strong property of Faber–Schauder system*//Journal of Mathematical Analysis and Applications.-2009.- 352.- P. 718-723.
8. Grigoryan T.M. *On the unconditional convergence of series with respect to the Faber-Schauder system*//Analysis Mathematica.- 39(213).- P. 179-188.
9. Григорян М.Г. *О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье*//Матем. сб.- 1990.- 181:8.- С. 1011-1030.

Материал поступил в редакцию 09.04.2015:

ՇԱՈՒԴԵՐԻ ԿՐԿՆԱԿԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ՇԱՐՔԵՐ

Տ.Մ. Գրիգորյան, Գ.Գ. Ղազարյան, Ա.Բ. Մինասյան

Գոյություն ունի $\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y)$ տեսքի Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգով կրկնակի շարք, որն ունիվերսալ է բոլոր $L^p_{[0,1]^2}$ տարածություններում, իսկ $\{|a_{k,n}|\}_{k,n=0}^{\infty}$ հաջորդականության ոչ զրոյական անդամները բոլոր ուղղություններով զուգամիտում են զրոյի :

Առանցքային բառեր. Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգ, զուգամիտություն, ունիվերսալ շարք:

UNIVERSAL SERIES BY SHAUDER SYSTEM

T.M. Grigoryan, G.G. Ghazaryan, A.B. Minasyan

There exists a double series with respect to Faber-Shauder system of the form $\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y)$, for which non-zero coefficients of the sequence $\{|a_{k,n}|\}_{k,n=0}^{\infty}$ converge to zero by all directions and which is universal in all $L^p_{[0,1]^2}$ spaces..

Keywords: Faber-Shauder system, convergece, universal series.

УДК 517.929; 517.968.43

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА

Г.А. Саргсян
(Национальный политехнический университет Армении)
E-mail: gagiksargsyan59@gmail.com

Установлена связь между задачей Дирихле для уравнения Монжа-Ампера **и** известным оператором С.Л. Соболева. В случае, когда область - единичный круг, в явном виде записаны совокупности собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: полнота, квадратичный пучок, собственная функция, спектральный параметр, оператор С.Л. Соболева.

Уравнение Монжа-Ампера имеет вид

$$E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right)+A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D=0. \tag{1}$$

Пусть коэффициенты A, B, C, D, E - непрерывные функции по x и y в области Ω, удовлетворяющие неравенству

$$AC-B^2-DE>0. \tag{2}$$

Сформулируем теорему Реллиха для уравнения Монжа-Ампера.

Теорема. Если имеет место неравенство (2), то существует не более двух решений уравнения (1), принимающих одинаковые граничные значения на $\partial\Omega$.

Изучение спектральных свойств операторов, порожденных линеаризированными системами дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания вращающейся идеальной жидкости, приводит к исследованию следующей краевой задачи Дирихле на собственные значения для уравнений с частными производными:

$$Mu+\lambda Lu=0, \tag{I}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{II}$$

где M и L - линейные дифференциальные операторы второго порядка, а λ - спектральный параметр. Краевая задача (I), (II) впервые была сформулирована Р.А. Александряном в качестве нерешенной проблемы общей теории краевых задач [1]. Задача (I), (II) в случае, когда M - оператор Даламбера, L - двумерный оператор Лапласа, была подробно исследована в работах Р.А. Александряна. Известно [2], что однородная спектральная задача Дирихле порождает оператор С.Л. Соболева A, который является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим на гладких функциях в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1\left(\Omega\right)$ согласно формуле

$A = -L^{-1}M$, где L^{-1} - обратный к эллиптическому оператору L при нулевых краевых условиях. В дальнейшем этой проблематике были посвящены многочисленные исследования авторов.

Работа состоит из двух разделов.

1°. О линеином пучке для уравнения Монжа-Ампера. В этом разделе рассматривается следующая краевая задача Дирихле (I), (II) на собственные значения, где

$$M = A\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1.1}$$

$$L = E\left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2\right]. \tag{1.2}$$

Относительно коэффициентов A, B, C, E предполагается, что они являются непрерывными функциями от x и y в области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть $u_\lambda(x,y)$ является решением краевой задачи (I), (II). Положим

$$P_\lambda(x,y) = 2A + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2},\ Q_\lambda(x,y) = 2B - \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y},\ R_\lambda(x,y) = 2C + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}. \tag{1.3}$$

Тогда краевую задачу (I), (II) можно переписать в виде

$$P_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2Q_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2R_\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.4}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.5}$$

Квадратичную форму, соответствующую уравнению (1.1), можно представить в виде суммы двух форм:

$$P_\lambda\xi^2 + 2Q_\lambda\xi\eta + R_\lambda\eta^2 = 2(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2) + p_\lambda\xi^2 + 2q_\lambda\xi\eta + r_\lambda\eta^2, \tag{1.6}$$

где

$$p_\lambda = A + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2};\ q_\lambda = B - \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y};\ r_\lambda = C + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}. \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. При выполнении условий

$$A > 0,\ AC - B^2 > 0,\ A + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} > 0 \tag{1.8}$$

в области Ω дифференциальное уравнение (1) является эллиптическим.

Доказательство. При выполнении условий (1.8) первая форма является положительно определенной в Ω. Далее, поскольку u_λ удовлетворяет уравнению (1), имеем

$$p_\lambda r_\lambda - q_\lambda^2 = \left(A + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2}\right)\left(C + \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}\right) - \left(B - \lambda E\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$= \lambda^2 E^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - \lambda^2 E^2 \left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda E A \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} + 2\lambda E B \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \lambda E C \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} + AC - B^2 = \lambda E \{ M u_\lambda + \lambda L u_\lambda \} + AC - B^2 = AC - B^2.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.1 следует, что собственные значения нелинейной краевой задачи (I), (II) будут среди тех значений параметра λ, при которых уравнение (1) не является эллиптическим.

Лемма 1.2. Пусть для некоторой собственной функции $u_\lambda(x,y)$ задачи (I), (II) выполняется условие

$$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0,\ AC - B^2 < 0 \tag{1.9}$$

для всех точек области Ω. Тогда уравнение (1) является гиперболическим в Ω.

Доказательство. Имеем

$$P_\lambda R_\lambda - Q_\lambda^2 = \left(A + \lambda E \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} \right) \left(C + \lambda E \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \right) - \left(B - \lambda E \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} \right)^2 +$$

$$+ 3(AC - B^2) + \lambda E \left(A \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} \right) =$$

$$= 4(AC - B^2) - \lambda^2 E^2 \left[\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] < 0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, при выполнении условий (1.9) задача Дирихле для уравнений Монжа-Ампера может иметь не более двух решений, принимающих одинаковые граничные значения на $\partial\Omega$, согласно теореме Реллиха. В нашем случае $u(x,y) \equiv 0$ всегда является тривиальным решением краевой задачи (I), (II), поэтому отличное от нуля решение единственное.

Если функция $E(x,y)$ обращается в нуль в некоторой точке области Ω и выполняется условие

$$A(x,y)C(x,y) - B^2(x,y) > 0 \tag{1.10}$$

то собственные значения краевой задачи (I), (II) на действительной оси отсутствуют.

Введем обозначения:

$$p = E \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2},\ q = E \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y}, \tag{1.11}$$

где $u_\lambda(x,y)$ - произвольное фиксированное решение задачи (I), (II). Тогда задачу (I), (II) можно переписать в виде

$$Mu + \lambda Tu = 0, \tag{I}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{II}$$

где

$$T = p\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \tag{1.12}$$

При условии (1.10) оператор M является эллиптическим, и поэтому существует обратный M^{-1} при граничных условиях Дирихле. Задача (I), (II) в операторной форме имеет вид

$$\Pi u + \mu u = 0, \tag{I}$$

$$u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{II}$$

Здесь $\Pi = -M^{-1}T$ - оператор типа С.Л. Соболева, действующий в соболевском пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\left(\mu = \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

В гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ рассмотрим оператор С.Л. Соболева, порожденный пучком задачи (I), (II): $\Pi = -M^{-1}L$.

В пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ рассмотрим новое скалярное произведение, заданное формулой

$$\left\langle u, \nu \right\rangle = -\iint\limits_{\Omega} Mu\nu dxdy. \tag{1.13}$$

Обозначим через $D_\Pi(\Omega)$ линейное многообразие бесконечно дифференцируемых финитных функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Известно, что $D_\Pi(\Omega)$ всюду плотно в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Известно $[5]$, что оператор $\Pi = -M^{-1}L$ на $D_\Pi(\Omega)$ является ограниченным и симметрическим оператором относительно скалярного произведения (1.13).

2°. **О спектральных свойствах пучка для уравнений Монжа-Ампера в пространстве вектор-функций.** В этом разделе изучается следующая краевая задача на собственные значения в пространстве вектор-функций:

$$M\vec{u} + \lambda K\vec{u} = \vec{0}, \tag{2.1}$$

$$\vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \tag{2.2}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} l_{11}L & \cdots & l_{1n}L \\ \vdots & & \\ l_{n1}L & \cdots & l_{nn}L \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$M_{ij}u_k = a_{ij}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + 2b_{ij}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial y} + c_{ij}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}, \tag{2.4}$$

$$i = 1,2,\dots,n\ ,\ j = 1,2,\dots,n,$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2 \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ \vdots \\ u_n(x,y) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$a_{ij}(x,y)$, $b_{ij}(x,y)$, $c_{ij}(x,y)$, $l_{ij}(x,y)$ - непрерывные функции от x и y в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ - граница области Ω. Пользуясь формальным представлением оператора Монжа-Ампера в дифергентной форме и вводя обозначения

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2} = \vec{p},\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2} = \vec{q},\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y} = \vec{r}, \tag{2.6}$$

задачу (2.1), (2.2) можно записать в линеаризированном виде

$$M\vec{u} + \lambda N\vec{u} = \vec{0}, \tag{2.7}$$

$$\vec{u}\Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \tag{2.8}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} l_{11}N_1 & \cdots & l_{1n}N_n \\ \vdots & & \\ l_{n1}N_1 & \cdots & l_{nn}N_n \end{pmatrix},\ N_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(p_k\frac{\partial}{\partial x} - r_k\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(q_k\frac{\partial}{\partial y} - r_k\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{2.9}$$

$$p_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2},\ q_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2},\ r_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial y}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $M_{i.j} \equiv 0$ при $i \neq j$ и является равномерно эллиптическим в области Ω, при $i = j$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Относительно K предполагается, что она единичная матрица, т.е. $l_{i.j} \equiv 0$, в Ω при $i \neq j$ и $l_{i.j}(x,y) \equiv 1$ при $(i = 1,\dots,n)$.

Обозначим

$$\overset{\overset{\rightarrow}{0}}{W}{}_2^1(\Omega) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \oplus \ldots \oplus \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{2.10}$$

В гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ вектор-функций рассмотрим оператор С.Л. Соболева, порожденный пучком задачи (2.7), (2.8) $A = -M^{-1}N$, где

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} M_{11}^{-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & M_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

В гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ рассмотрим новое скалярное произведение, заданное формулой

$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = -\iint\limits_{\Omega} M\vec{u}\vec{v}dxdy. \tag{2.12}$$

Теорема 2.1. Скалярное произведение (2.12) эквивалентно исходному скалярному произведению гильбертова пространства $\overset{\to}{\overset{0}{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. В самом деле, покажем, что существуют две положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что выполняется неравенство

$$C_1\left\|\vec{u}\right\|_1 \le \left\|\vec{u}\right\| \le C_2\left\|\vec{u}\right\|_0 \text{ для всех } \vec{u}(x,y) \in \overset{\to}{\overset{0}{W}}{}_2^1(\Omega), \tag{2.13}$$

где $\left\|\vec{u}\right\|_0^2 = -\iint\limits_{\Omega} \Delta\vec{u}\vec{u}dxdy,\ \left\|\vec{u}\right\|_1^2 = -\iint\limits_{\Omega} M\vec{u}\vec{u}dxdy.$

Используя неравенство Коши-Буняковского для всех $\vec{u}(x,y) \in \overset{\to}{\overset{0}{W}}{}_2^1(\Omega)$, имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{u}\right\|_1^2 &= (\vec{u},\vec{u})_1 = -\iint\limits_{\Omega} M\vec{u}\vec{u}dxdy = -\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} M_{ii}u_iu_idxdy = \\
&= \iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2b_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial y} + c_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)u_idxdy \le \\
&\le \delta\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \le \\
&\le 2\delta\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy = 2\delta\sum_{i=1}^{n}\left\|u_i\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 = C_2^2\left\|\vec{u}\right\|_0^2,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\delta = \dfrac{C_2^2}{2} = \max\limits_{\Omega}\left\{\left|a_{ii}(x,y)\right|, \left|b_{ii}(x,y)\right|, \left|c_{ii}(x,y)\right|\right\}.$

Используя равномерную эллиптичность операторов M_{ii}, имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{u}\right\|_1^2 &= -\iint\limits_{\Omega} M\vec{u}\vec{u}dxdy = -\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2b_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial y} + c_{ii}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)u_i\right)dxdy = \\
&= \iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left\{a_{ii}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + 2b_{ii}\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial y} + c_{ii}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \ge \\
&\ge C_1\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy = C_1\left\|u\right\|_0^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\vec{D}_A(\Omega)$ линейное многообразие бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций из $\overset{\rightarrow}{\overset{0}{W}}{}_2^1(\Omega)$. Известно, что $\vec{D}_A(\Omega)$ всюду плотно в $\overset{\rightarrow}{\overset{0}{W}}{}_2^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Оператор $A=-M^{-1}N$ на $\vec{D}_A(\Omega)$ является ограниченным и симметрическим оператором относительно скалярного произведения (2.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{\nu}$ - произвольные вектор-функции из $D_A(\Omega)$, тогда

$$
\begin{aligned}
&\left(A\vec{u},\vec{v}\right)=-\left\langle M^{-1}N\vec{u},\vec{v}\right\rangle=\iint_\Omega N\vec{u}\vec{v}dxdy=\sum_{i=1}^n\iint_\Omega M_{ii}\vec{u}_i\vec{v}_i dxdy=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p_i\frac{\partial u_i}{\partial x}-r_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(q_i\frac{\partial u_i}{\partial y}-r_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\right\}v_i dxdy=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\iint_\Omega\left\{\left(p_i\frac{\partial u_i}{\partial x}-r_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x}+\left(q_i\frac{\partial u_i}{\partial y}-r_i\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x}\right\}dxdy=\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\iint_\Omega\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x}\left(p_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)-\frac{\partial u_i}{\partial y}\left(r_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)-\frac{\partial u_i}{\partial x}\left(r_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial y}\left(q_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)\right\}dxdy=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p_i\frac{\partial v_i}{\partial x}-r_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+u_i\frac{\partial}{\partial y}\left(q_i\frac{\partial v_i}{\partial y}-r_i\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right\}dxdy=\\
&=\sum_{i=1}^n\iint_\Omega u_{ii}N_{ii}v_i dxdy=-\left\langle\vec{u},M^{-1}N\vec{v}\right\rangle=\left\langle\vec{u},A\vec{v}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Симметричность оператора A на D_A следует из ограниченности соответствующей квадратичной формы. В самом деле, для произвольной вектор-функции $\vec{u}\in D_A(\Omega)$ в силу неравенства Коши имеем

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle\Pi\vec{u},\vec{u}\right\rangle\right|=\left|\iint_\Omega N\vec{u}\vec{u}dxdy\right|=\left|\sum_{i=1}^n\iint_\Omega N_{ii}u_iu_i dxdy\right|\le\\
&\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\iint_\Omega\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial y}\right|+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy\le\\
&\le\gamma\sum_{i=1}^n\iint_\Omega\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy=\gamma\left\|\vec{u}\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

где $\gamma=\max\limits_\Omega\left\{\left|p_i(x,y)\right|,\left|q_i(x,y)\right|,\left|r_i(x,y)\right|\right\},\ \ i=1,\ldots n.$

Самосопряженное расщирение оператора A на все гильбертово пространство $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ будем обозначать той же буквой A. Пусть $\vec{u}_\lambda(x,y)$ является собственной вектор-функцией краевой задачи (2.7), (2.8), соответствующей собственному значению λ. Тогда она будет собственной вектор-функцией линеаризированной краевой задачи (2.7), (2.8) и, следовательно, собственной вектор-функцией оператора С.Л. Соболева. Таким образом, на основании теоремы (2.1) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.3. Собственные значения краевой задачи (2.1), (2.2) принадлежат спектру оператора С.Л. Соболева и поэтому расположены на действительной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрян Р. А. // Тр. Моск. мат. об-ва.-1960.- Т.9.- С. 455-505.
2. Вирабян Г.В., Саргсян Г.А. *О задаче Дирихле для уравнения Монжа-Ампера* // Уч. Зап. ЕГУ.- 1990.- N1 (173).
3. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения*.- М.: Наука, 1988.
4. Курант Р. *Уравнения с частными производными.*- М.: Мир, 1964.
5. Саргсян Г.А. *О задаче Дирихле для уравнения Монжа-Ампера//* Математика в высшей школе.- 2012.- Т.8, №2.- С. 31-35.

Материал поступил в редакцию 09.04.2015:

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ ՄՈՆԺ-ԱՄՊԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Գ.Ա. Սարգսյան

Ստացված է կապ խնդրի և Ս.Լ.Սոբոլևի հայտնի օպերատորի միջև:Երբ տիրույթը միավոր շառավղով շրջանն է, բացահայտ տեսքով գրված է դիտարկվող խնդրի սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների լրիվ հավաքույթը:

Առանցքային բառեր. լրիվություն, սեփական ֆունկցիա, սպեկտրալ պարամետր, Սոբոլևի օպերատոր:

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE MONGA-AMPERA EQUATION

G.A. Sargsyan

The connection of the problem with the well-known operator of S.L.Sobolev is received. In the case of unit disk domain, the eigenvalues and eigenfunctions of the problem are given in the explicitform.

Keywords: completeness, eigenfunction, the spectral parameter, the operator of Sobolev.

УДК 512.62

О СУММИРУЕМОСТИ ЛАКУНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ЧЕЗАРО

Л.Н. Галоян
(Ереванский государственный университет)
levongaloyan@ysu.am

Изучаются условия, налагаемые на коэффициенты лакунарного тригонометрического ряда, которые необходимы и достаточны для суммируемости методами Чезаро этого ряда почти всюду, а также рассматриваются условия, при наличии которых подпоследовательности средних Чезаро сходятся или расходятся (ограниченно и неограниченно).

Ключевые слова: лакунарный тригонометрический ряд, средние Чезаро, неограниченная и ограниченная расходимости.

ВВЕДЕНИЕ. Напомним, что тригонометрический ряд называется лакунарным, если он имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx, \tag{1}$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} a_m, & k = n_m, \\ 0, & k \neq n_m, \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} b_m, & k = n_m, \\ 0, & k \neq n_m, \end{cases} \qquad m = 1,2,..., \tag{2}$$

и натуральные числа $\left\{n_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1, \qquad k = 1,2,.... \tag{3}$$

Хорошо известны следующие теоремы (см.[1],стр.684, 689).

ТЕОРЕМА (А. Зигмунд). Если для лакунарного ряда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2} < +\infty, \tag{4}$$

то он сходится почти всюду.

ТЕОРЕМА (А. Зигмунд). Если лакунарный ряд вида (1) суммируем некоторым линейным методом T^* на множестве положительной меры, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2} < +\infty.$$

Из последней теоремы следует, что лакунарный ряд, у которого

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2} = +\infty, \tag{5}$$

не может быть рядом Фурье. Действительно, в этом случае ряд (1) был бы почти всюду суммируем методом средних арифметических (см.[1],стр.143), что, в свою очередь, согласно сформулированной теореме, повлекло бы выполнение (4).

В настоящей статье ставится следующий вопрос: что можно сказать о степени суммируемости методами Чезаро лакунарных рядов вида (1), если для них условие (4) выполняется? Отметим, что суммируемость тригонометрических рядов методами Чезаро изучена в ряде работ (см [2]-[7]).

Обозначим через $\sigma_n^\alpha(x)$ средние Чезаро порядка α лакунарного ряда вида (1). Пусть далее S - некоторое бесконечное подмножество множества натуральных чисел. Положим

$$\Omega_p(S) =: \max_{n\in S; n_p \le n < n_{p+1}} \left(1 - \frac{n_p - 1}{n}\right)^\alpha \left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right),$$

$$\omega_p(S) =: \min_{n\in S; n_p \le n < n_{p+1}} \left(1 - \frac{n_p - 1}{n}\right)^\alpha \left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right).$$

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть для лакунарного ряда вида (1) выполняется условие (4). Тогда:

а) если $\limsup\limits_{p\to\infty} \Omega_p(S) = +\infty,$ то

$$\limsup_{n\in S; n\to\infty} |\sigma_n^\alpha(x)| = +\infty$$

на множестве положительной меры;

б) если $\liminf\limits_{p\to\infty} \omega_p(S) = 0,$ то

$$\liminf_{n\in S; n\to\infty} |\sigma_n^\alpha(x) - S(x)| = 0\,,$$

где $S(x)$ сумма ряда (1);

в) если $0 < \limsup\limits_{p\to\infty} \Omega_p(S) < +\infty,$ то последовательность $\sigma_n^\alpha(x)$, где $n \in S$, ограниченно расходится на множестве положительной меры;

г) если $\limsup\limits_{p\to\infty} \Omega_p(S) = 0,$ то

$$\lim_{n\in S; n\to\infty} |\sigma_n^\alpha(x) - S(x)| = 0$$

почти всюду, где $S(x)$ сумма ряда (1).

Непосредственно из доказательства теоремы 1 мы увидим справедливость следующего результата.

Теорема 2. Пусть для лакунарного ряда вида (1) выполняется условие (4). Тогда, для того чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n^\alpha(x) - S(x)| = 0$ выполнялось почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{p\to\infty} n_p^\alpha \left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right) = 0.$$

Замечание. Последний результат в сочетании с теоремой 2 из [1], стр. 691 означает, что суммируемость почти всюду средних Чезаро порядка α лакунарного ряда Фурье вида (1), для которой выполнены условия последней теоремы, влечет равномерную сходимость ряда (1) и принадлежности суммы этого ряда к пространству $Lip\alpha, 0<\alpha<1$.

Основные определения и вспомогательные утверждения. Напомним определение методов суммирования Чезаро и чезаровских средних для произвольных числовых рядов (см. [8],стр.130-133). Пусть числа $A_n^\alpha, n=0,1,\ldots$ определяются как тейлоровские коэффициенты разложения в степенной ряд следующей функции:

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^\alpha z^n, \qquad |z|<1.$$

Хорошо известно, что

$$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}, \qquad n\geq 1, \qquad A_0^\alpha=1.$$

Последовательность $A_n^\alpha, n=0,1,\ldots$ называют числами Чезаро. Мы будем использовать следующее свойство этих чисел (см. [8],стр.130):

$$A_n^\alpha=\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot[1+O(1/n)]. \tag{6}$$

Пусть дан ряд $\sum a_n$ и $S_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$, $n=0,1,\ldots$ - частичные суммы этого ряда. Линейные средние

$$\sigma_n^\alpha=\frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k=\frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha}a_k \tag{7}$$

называют средними Чезаро порядка α ряда $\sum a_n$. Очевидно, что нулевые средние σ_n^0 совпадают с частичными суммами S_n, а средние σ_n^1 - с арифметическими средними данного ряда. Говорят, что последовательность S_n суммируема методом Чезаро порядка α или методом (C,α) к числу S, если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha=S$.

Методы Чезаро положительного порядка рягулярны, то есть любая сходящаяся подпоследовательность суммируется этими методами к их обычному пределу. Вообще, для методов Чезаро справедливо свойство "включения": если ряд $\sum a_n$ суммируется методом (C,α_1), то он суммируется любым методом (C,α_2), где $\alpha_2>\alpha_1$, к тому же пределу. Мы будем использовать следующую лемму (см.[1],стр.704).

Лемма Сидона. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (2), то для всякого тригонометрического полинома

$$T(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k\cos n_kx \qquad \text{или} \qquad T(x)=\sum_{k=1}^{m}b_k\sin n_kx$$

имеем неравенство

$$\int_0^{2\pi} T^4(x)dx \le C\left(\int_0^{2\pi} T^2(x)dx\right)^2,$$

где C – константа, не зависящая ни от порядка полинома, ни от его коэффициентов.

Из этой леммы и неравенства

$$8\left(a^4 + b^4\right) \ge \left(a+b\right)^4$$

следует, что для всякого тригонометрического полинома

$$H(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

при условии (3) выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} H^4(x)dx \le M\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}\right)\right)^2, \tag{8}$$

где M – константа, не зависящая ни от порядка полинома H(x), ни от его коэффициентов.

Доказательство теоремы 1. Средние Чезаро лакунарного ряда (1) имеют следующий вид (см. (7)):

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right) =$$

$$= \frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{p} A_{n-n_k}^\alpha\left(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x\right), \text{ где } n_p \le n < n_{p+1}.$$

Представим эти средние в следующем виде:

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{A_{n-n_p}^\alpha}{A_n^\alpha}\left(a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right) + \sum_{k=1}^{q}\frac{A_{n-n_k}^\alpha}{A_n^\alpha}\left(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x\right) +$$

$$+\frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=q+1}^{p-1} A_{n-n_k}^\alpha\left(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x\right), \quad \text{где } n_p \le n < n_{p+1}, \qquad 1 \le q < p-1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}\sigma_n^\alpha(x) - \sum_{k=1}^{q} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x = \\ = \frac{A_{n-n_p}^\alpha}{A_n^\alpha}\left(a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right) + \frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{k=q+1}^{p-1} A_{n-n_k}^\alpha\left(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x\right) + \\ +\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{A_{n-n_k}^\alpha}{A_n^\alpha} - 1\right)\left(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x\right) = \sum_{\nu=1}^{3} I_{\nu,n}(x), \\ n_p \le n < n_{p+1}, \qquad 1 \le q < p-1.\end{gathered} \tag{9}$$

Далее заметим, что

$$\left\|a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} \left|a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right| dx \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right)\left(\operatorname{sgn} a_p \cos n_p x + \operatorname{sgn} b_p \sin n_p x\right) dx = \frac{\pi}{2}\left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right). \tag{10}$$

С другой стороны, имеем

$$\left\|a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right\|_{L_2}^2 = \int_0^{2\pi} \left(a_p \cos n_p x + b_p \sin n_p x\right)^2 dx = \pi\left(a_p^2 + b_p^2\right). \tag{11}$$

Из (10) и (11) заключаем (см. $[8]$, стр.216), что мера

$$\mu\left\{x \in (0,2\pi) : \left|I_{1,n}(x)\right| \geq \frac{A_{n-n_p}^{\alpha}}{8A_n^{\alpha}}\left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right)\right\} \geq \frac{\pi}{16} \cdot \frac{\left(\left|a_p\right| + \left|b_p\right|\right)^2}{a_p^2 + b_p^2} \geq \frac{\pi}{16}. \tag{12}$$

Используя лемму Сидона, имеем (см. (3), (6) и (8))

$$\forall y > 0: \qquad \mu\left\{x \in (0,2\pi) : \left|I_{2,n}(x)\right| \geq y\right\} \leq \frac{M}{y^4} \cdot \left(\sum_{k=q+1}^{p-1} \left(\frac{A_{n-n_k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}\right)^2 \cdot \left(a_k^{\,2} + b_k^{\,2}\right)\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{M_\alpha}{y^4} \cdot \left(\sum_{k=q+1}^{p-1} \left(a_k^{\,2} + b_k^{\,2}\right)\right)^2,$$

следовательно,

$$\mu\left\{x \in (0,2\pi) : \left|I_{2,n}(x)\right| \geq \left(\sum_{k=q+1}^{p-1} \left(a_k^{\,2} + b_k^{\,2}\right)\right)^{1/4}\right\} \leq M_\alpha \sum_{k=q+1}^{p-1} \left(a_k^{\,2} + b_k^{\,2}\right), \tag{13}$$

где M_α – константа, зависящая разве лишь от α. Далее, согласно (3), будем иметь

$$\left|I_{3,n}(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{q} \left(\frac{A_{n-n_k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1\right)\left(\left|a_k\right| + \left|b_k\right|\right) \leq \left(\frac{A_{n-n_q}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - 1\right) \leq$$
$$\leq B_\alpha \frac{n_q}{n_p} \cdot \sum_{k=1}^{q} \left(\left|a_k\right| + \left|b_k\right|\right) \leq B_\alpha \lambda^{p-q} \cdot \sum_{k=1}^{q} \left(\left|a_k\right| + \left|b_k\right|\right). \tag{14}$$

Приступим к доказательству пункта (a) теоремы 1 (остольные пункты доказываются аналогичным образом). Пусть тройка возрастающих последовательностей натуральных чисел

$$\left\{q_j; p_j; N_j\right\}_{j=1}^{\infty}$$

стремится к бесконечности и удовлетворяет при всех $j = 1,2...$ условиям

$$q_j < p_j - 2, \qquad N_j \in S, \tag{15}$$

$$\sum_{k=q_j+1}^{p_j-1}\left(a_k^{\,2}+b_k^{\,2}\right)<\frac{1}{j}, \tag{16}$$

$$\lambda^{p_j-q_j}\cdot\sum_{k=1}^{q_j}\left(\left|a_k\right|+\left|b_k\right|\right)<\frac{1}{j}, \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{n_{p_k}-1}{N_k}\right)^{\alpha}\left(\left|a_{p_k}\right|+\left|b_{p_k}\right|\right)=+\infty, \qquad n_{p_j}\le N_j<n_{p_j+1}, \quad j=1,2,\ldots. \tag{18}$$

Из (13) и (16) ясно, что последовательность

$$I_{2,N_j}(x)$$

сходится к нулю по мере, следовательно, для некоторой подпоследовательности

$$N_{j_1},N_{j_2},\ldots.,N_{j_s},\ldots$$

соответствующая подпоследовательность почти всюду сходится к нулю. Используя (9), (12), (14), (17) и (18), можем сказать, что

$$\mu\left\{x\in(0,2\pi):\left|\sigma_{N_{j_s}}^{\alpha}(x)\right|\ge D_\alpha\left(1-\frac{n_{p_{j_s}}-1}{N_{j_s}}\right)^{\alpha}\left(\left|a_{p_{j_s}}\right|+\left|b_{p_{j_s}}\right|\right)\right\}\ge\frac{\pi}{16}, \tag{19}$$

где D_α – константа, зависящая разве лишь от α. Положим

$$G_s=\left\{x\in(0,2\pi):\left|\sigma_{N_{j_s}}^{\alpha}(x)\right|\ge D_\alpha\left(1-\frac{n_{p_{j_s}}-1}{N_{j_s}}\right)^{\alpha}\left(\left|a_{p_{j_s}}\right|+\left|b_{p_{j_s}}\right|\right)\right\}, \qquad s=1,2,\ldots$$

и

$$G=\bigcap_{t=1}^{\infty}\bigcup_{s=t}^{\infty}G_s.$$

Ясно, что мера множества G положительна. Согласно (19) и (20),

$$x\in G\Rightarrow x\in G_{s_\mu}, \qquad \mu=1,2\ldots\Rightarrow\limsup_{s\to\infty}\left|\sigma_{N_{j_s}}^{\alpha}(x)\right|=+\infty, \qquad x\in G.$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды*.- М.: Наука, 1961.- 936 с.
2. Меньшов Д.Е. *Применение методов суммирования Чезаро отрицательного порядка к тригонометрическим рядам Фурье от суммируемых функций и от функций суммируемых с квадратом* // Мат. сб.- 1974.- Т. 93 (135), № 4.- С. 494-511.
3. Жижиашвили Л.В. *О сходимости и суммируемости тригонометрических рядов Фурье*// Мат. заметки.- 1976.- Т.19, 6.- С. 887-898.

4. Григорьев А.И. *О сходимости Чезаровских средних тригонометрических рядов Фурье//* Мат. заметки .- 1983.-Т.34, 4.- С. 310-321.
5. Галоян Л.Н. *Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу* (C, α, β) // Известие НАН РА.- 2011.-Т. 46, 5.- С.25-40.
6. Галоян Л.Н., Григорян М.Г., Кобелян А.Х. *О сходимости рядов Фурье по классическим системам"*// Матем. сб.- 2015.- Т. 206, № 7.- С. 55–94.
7. Grigoryan M.G., Galoyan L.N. *On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series//* J. Math. Anal. Appl.-2016.- http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.001.
8. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды Фурье*.-1959.- Т. 1 .- 616 с.

Материал поступил в редакцию 08.10.20155:

ԼԱԿՈՒՆԱՐ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ՉԵԶԱՐՈՅԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ն.Գալոյան

Սույն աշխատանքում ուսումնասիրվում են լակունար եռանկյունաչափական շարքերի գործակիցների վրա դրվող պայմանները, որոնք անհրաժեշտ են և բավարար այդ շարքի՝ Չեզարոյի մեթոդներով հանրագումարման համար: Քննարկվում են նաև այն պայմանները, որոնց առկայությամբ նշված շարքերի ինչ-որ ենթահաջորդականություն զուգամետ է կամ տարամետ (սահմանափակ և անսահմանափակ իմաստներով):

Առանցքային բառեր. լակունար եռանկյունաչափական շարք, Չեզարոյի միջիններ, անսահմանափակ և սահմանափակ տարամիտություններ:

ON THE SUMMABILITY OF LACUNARY TRIGONOMETRIC SERIES BY CESARO METHODS

L.N. Galoyan

In this paper we study the conditions imposed on the coefficients of lacunary trigonometric series, which are necessary and sufficient for summability of this series almost everywhere by methods of Cesaro. In work also dealt with the conditions under which the subsequence of Cesaro averages converge or diverge (bounded and unbounded).

Kaywords: lacunary trigonometric series, Cesaro means, bounded and unbounded divergence.

УДК 514.7

МАЖОРАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МЕТРИКЕ $ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2$

Р.Ц. Мусаелян
(Горисский государственный университет)
E-mail: rubmus49@gmail.com

Рассматривается метрика $ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2$. С помощью известной теории сравнения дифференциальных уравнений (см. [1]) получаются некоторые результаты. Определяются асимптотически устойчивые в целом решения уравнений (см [1]). Доказывается, что геодезические линии в указанной метрике мажорируются геодезическими линиями плоскости Лобачевского определенной кривизны.

Ключевые слова: метрика, кривизна, производная, плоскость, геодезические линии.

Рассматривается метрика

$$ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2. \tag{1}$$

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f_{\mathrm{I}}'(x) = 2\tau f_{\mathrm{I}} + \sigma f_{\mathrm{I}}^2 + \sigma e^{-2\tau x} \cdot f_{\mathrm{I}}^3 . \tag{2}$$

Здесь τ, σ - постоянные.

Будем рассматривать также дифференциальное уравнение

$$\tilde{f}_{\mathrm{I}}'(x) = 2\tilde{\tau}\tilde{f}_{\mathrm{I}} - \tilde{\sigma}_1 e^x \tilde{f}_{\mathrm{I}}^2 + \tilde{\sigma}_2 e^{(-2\tilde{\tau}+1)x} \cdot \tilde{f}_{\mathrm{I}}^3, \tag{3}$$

где $\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ - постоянные.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решения дифференциальных уравнений (2) и (3) асимптотически устойчивы в целом[1].

Доказательство. Сначала докажем утверждение для уравнения (2).

Рассмотрим линейное уравнение, которое получается из (2):

$$\bar{f}_{\mathrm{I}}'(x) = 2\tau \bar{f}_{\mathrm{I}}(x). \tag{4}$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$f_{\mathrm{I}}(x) = e^{2\tau x} \cdot g_{\mathrm{I}}(x) , \tag{5}$$

где, очевидно, $y = e^{2\tau x}$ есть решение уравнения (4). Учитывая соотношения (5) и (4), после несложных вычислений получим относительно функций $g_{\mathrm{I}}(x)$ следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

---

[1] Пусть решения уравнения $y' = F(t, y)$ $(*)$ однозначно определяются начальными условиями. Решение $y_0(t)$ $(a < t < \infty)$ называется асимптотически устойчивым в целом, если все решения $y(t)$ $(t_0 \leq t < \infty)$, $t_0 > a$ уравнения (*) обладают свойством $\lim_{t\to\infty}|y(t) - y_0(t)| = 0$ (см [1]).

$$g_{\mathrm{I}}^{'}(x) = \sigma e^{2\tau x} \cdot g_{\mathrm{I}}^2 + \sigma e^{2\tau x} \cdot g_{\mathrm{I}}^3 \,. \quad (6)$$

Это дифференциальное уравнение имеет интеграл в виде

$$ln\left|\frac{1+y}{y}\right| - \frac{1}{y} = \frac{\sigma}{2\tau} e^{2\tau x} - c_{\mathrm{I}}. \quad (7)$$

Здесь $y = g_{\mathrm{I}}(x)$, c_{I} - постоянное. Равенство (7) есть общее решение дифференциального уравнения (6) в неявном виде.

Пусть $y = g_{\mathrm{I}}(x) > 0$. Левая часть равенства (7) относительно y - монотонно возрастающая функция, так как ее производная положительна. Далее методом математического анализа можно показать, что та же часть равенства (7) - строго отрицательная функция по переменной y. Следовательно,

$$\frac{\sigma}{2\tau}(e^{2\tau x} - e^{2\tau_0 x}) < 0.$$

Здесь из (7) выбрано решение, определяемое точкой $(x_0, g_{\mathrm{I}}(x_0))$. Из последнего неравенства получим $x < x_0$. Это значит, что $X_{x_0} = \{-\infty < x < x_0\}$ является областью определения для решений $y = g_{\mathrm{I}}(x) > 0$, определяемой точкой $(x_0, g_{\mathrm{I}}(x_0))$.

Очевидно, только тривиальное решение (6), которое не получается из общего решения (7), определено на всей прямой.

Из соотношения (7) получим

$$x = \frac{1}{2\tau} ln\left\{c_{\mathrm{I}} + \frac{2\tau}{\sigma}\left[ln\frac{1+y}{y} - \frac{1}{y}\right]\right\} = F_{\mathrm{I}}(y). \quad (8)$$

Функция $x = F_{\mathrm{I}}(y)$, очевидно, является обратной к неявной функции $y = g_{\mathrm{I}}(x) > 0$, определяемой из соотношения (7). Очевидно, также, что областью определения функции $F_{\mathrm{I}}(y)$ является $Y_{x_0} = \{y;\ \lambda_{\mathrm{I}}(x_0) < y < \infty\}$, где $\lambda_{\mathrm{I}}(x_0)$ - некоторое положительное число, определяемое начальными данными, притом чем больше x_0, тем меньше $\lambda_{\mathrm{I}}(x_0)$. Очевидно, для любого $y \in Y_{x_0}$ выполняется $\frac{dF_{\mathrm{I}}(y)}{dy} > 0$. Следовательно, $x = F_{\mathrm{I}}(y)$- монотонно возрастающая. По известной теореме из курса математического анализа (см. [2]) обратная к функции $x = F_{\mathrm{I}}(y)$ существует с областями определения и значения X_{x_0} и Y_{x_0} соответственно. Эта функция монотонно возрастающая, и для нее выполняется предельное соотношение

$$\lim_{x\to\infty} g_{\mathrm{I}}(x) = \lambda_{\mathrm{I}}(x_0).$$

Асимптотическая устойчивость следует из последнего соотношения и из (5).

Обратимся теперь к уравнению (3). Отметим, что, повторяя аналогичные рассуждения, получим следующее уравнение относительно функции $\tilde{g}_{\mathrm{I}}(x)$, которая введена аналогично функции $g_{\mathrm{I}}(x)$:

$$\widetilde{g'}_{\mathrm{I}}(x) = -\tilde{\sigma}_1 e^{(2\tilde{\tau}+1)x} \tilde{g}_{\mathrm{I}}^2 + \tilde{\sigma}_2 \cdot e^{(2\tilde{\tau}+1)x} \cdot \tilde{g}_{\mathrm{I}}^3. \quad (9)$$

Это уравнение разрешается в виде

$$\frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1^2} \cdot ln\left|\tilde{\sigma}_2 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{y}\right| + \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2\tilde{\tau}+1} \cdot e^{(2\tilde{\tau}+1)x} \cdot \tilde{c}_{\mathrm{I}}, \quad (10)$$

где $y = \tilde{g}_{\mathrm{I}}(x)$; $\tilde{c}_{\mathrm{I}}$ - постоянная.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, приходим к выводу, что решение $y = \tilde{g}_{\mathrm{I}}(x) > 0$ монотонно возрастает, определено на полупрямой как $g_{\mathrm{I}}(x)$, асимптотически устойчиво в целом. Теорема доказана.

Рассмотрим дифференциальное уравнение геодезических в метрике (1). Оно имеет следующий вид:

$$f''(x) = 2\mathrm{k}^2(x,y)f'(x) - k^2(x,y)b'(y)e^x \cdot f'^2(x) + \frac{1}{k^2(x,y)}e^{-2x} \cdot f'^3(x). \qquad (11)$$

Это уравнение после принятия обозначения $f'(x) = \bar{f}(x)$ примет вид

$$\bar{f}(x) = 2k^2(x,y)\bar{f}(x) - k^2(x,y)b'(y)e^x \bar{f}^2_{(x)} + \frac{1}{k^2(x,y)} \cdot e^{-2x} \cdot \bar{f}^3(x). \qquad (12)$$

Здесь $k = \sqrt{-K(x,y)}$, а $K(x,y)$.

Кривизна метрики (1).

Коэффициенты уравнения (12), согласно предположению, принадлежат классу $C^{4,1}$ [1] -ограниченных функций и, значит, удовлетворяют теореме Пикара. Если при этом правая часть (12) удовлетворяет условию Липшица, то, как известно (см $[1]$), при этих предположениях существует единственное решение в целом в рассматриваемой области. Таким образом, начальное данное для уравнения (12) однозначно определяет интегральную кривую. О поведении интегральной кривой уравнения (12) будем судить с помощью мажорантных уравнений, которые мы построим, используя ограниченность коэффициентов уравнений (12) в рассматриваемой области.

Решение уравнения (12) не может менять знак, так как $\bar{f}(x) = 0$ есть его решение. Учитывая это обстоятельство, будем различать случаи: $\bar{f}(x) > 0$ и $\bar{f}(x) < 0$. Сначала рассмотрим в области вида $\Pi_{x_2} = \{x, y;\ -\infty < x < x_2,\ 0 < y < \infty\}$, где x_2 - произвольное число, уравнение

$$f'_2(x) = 2k_2 f_2 + a_2 f_2^2 + a_2 e^{-2k_2 x} \cdot f_2^3, \qquad (13)$$

где k_2 и a_2 - положительные постоянные и

$$k_2 > \sup_{\Pi_{x_2}}\left\{k^2(x,y), \frac{1}{k^2(x,y)}\right\},$$

$$a_2 > \sup_{\Pi_{x_2}}\left\{k_2 \cdot ce^x,\ k_2 e^{2(k_2-1)x}\right\}, \qquad (14)$$

а c - постоянная ограничивающая функции $b'(y)$. Очевидно, $k > 1$, и уравнение (13) является мажорантным в области Π_{x_2} для уравнения (12).

Аналогичным образом построим оценочное уравнение снизу для уравнения (12):

$$f'_1(x) = 2k_1 f_1 - a_0 e^x f_1^2 + a_1 e^{-(2k_1-1)x} \cdot f_1^3, \qquad (15)$$

где N_1, a_0, a_1 - постоянные и

$$k_1 < \inf_{\Pi_{x_1}}\left\{k^2(x,y), \frac{1}{k^2(x,y)}\right\},$$

$$a_0 \geq k_1 c$$

[1] $C^{4,1}$- класс функций, ограниченных вместе с производными до 4-го порядка и точными константами Липшица для производных 4-го порядка.

$$a_1 \leq \underset{\Pi_{x_1}}{inf}\left\{k_1 \cdot e^{(2k_1-3)x}\right\}.$$

Очевидно, $k_1 < 1$, и уравнение (15) является оценочным в области Π_{x_1} для уравнения (12).

Будем в области $\Pi_\nu = \{-\infty < x < x_\nu\}$ рассматривать дифференциальное уравнение

$$\lambda'(x) = 2\nu\, \lambda(x) + \nu e^{-2\nu x} \cdot \lambda^3(x), \qquad (16)$$

Которое представляет собой уравнение геодезических на плоскости Лобачевского кривизны $-\nu^2$, где $\lambda(x)$- разумеется, производная от геодезической линии. Общее решение уравнения (16) записывается в виде

$$\lambda(x) = \pm\frac{e^{2\nu x}}{\sqrt{\tilde{c}_2 - e^{2\nu x}}}, \qquad (17)$$

где $\tilde{c}_2$ - постоянная.

Теорема 2. Можно указать число $\nu_2 > 0$ и функцию $\lambda_2(x)$, удовлетворяющую уравнению (16) при $\nu = \nu_2$, такую, что $f_2(x) \geq \lambda_2(x)$, где $f_2(x)$- интегральная кривая уравнения (13).

Доказательство. По теореме 1 уравнение (13) разрешается в виде

$$f_2(x) = e^{2k_2x} \cdot g_2(x),$$

где $\bar{y} = g_2(x)$ удовлетворяет равенству

$$ln\left(1 + \frac{1}{\bar{y}}\right) - \frac{1}{\bar{y}} = \frac{a_2}{2k_2}\left(e^{2k_2x} - e^{2k_2x_2}\right). \qquad (18)$$

Напомним, что $\bar{y} > 0$ и $x < x_2$.

Пусть $g_2(x)$, определяемая из последнего соотношения, удовлетворяет следующему условию:

$$g_2(x) \geq \tilde{\lambda}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_2 - \varepsilon^2 e^{2\nu x}}}, \qquad (19)$$

где $\tilde{\lambda}_2(x)$ определяется из (17).

Из (19), в частности, следует

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_2}} \leq g_2(-\infty), x_2 \leq x_\nu, \qquad (20)$$

где x_2 и x_ν- граничные точки областей Π_{x_2} и Π_ν соответственно. Потребуем, чтобы $\nu \geq k_2$ (так как $e^{2k_2x} \geq \varepsilon e^{2\nu x}$). Пусть $\{\nu\}$ – множество чисел ν, для которых выполняется соотношение (20), и $\nu \geq k_2$. Пусть далее $\nu_2 \geq \nu^*$, где $\nu^* = inf\{\nu\}$.

Рассмотрим неравенство

$$\frac{2k_2}{a_2} \cdot \frac{1}{\bar{y}^2 + \bar{y}^3} < \frac{2}{\bar{y}^3},$$

которое выполняется для $\bar{y} > 0$ (напомним, что $k_2 \leq a_2$). Интегрируя неравенство в пределах $\bar{y}_0$ до $\bar{y}$, получим

$$\frac{2k_2}{a_2}\left[ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\right] + \frac{2k_2}{a_2} \cdot C_2 < \tilde{c}_2 - \frac{1}{\bar{y}^2},$$

где

$$c_2 = \frac{1}{\bar{y}} - ln\left(1 + \frac{1}{\bar{y}_0}\right),\ \tilde{c}_2 = \frac{1}{\bar{y}_0^2}.$$

Из последнего неравенства следует

$$\frac{1}{2k_2} ln \left\{\frac{2k_2}{a_2}\left[ln\left(1+\frac{1}{\bar{y}}\right)-\frac{1}{\bar{y}}\right]+\frac{2k_2}{a_2}c_2\right\} < \frac{1}{2k_2} ln\left(\tilde{c}_2 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right). \qquad (21)$$

Введем положительный параметр ε так, чтобы для правой части неравенства (22) выполнялось условие

$$\frac{1}{2k_2} ln\left(\tilde{c}_2 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right) < \frac{1}{2\nu_2} ln\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\tilde{c}_2 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right). \qquad (22)$$

Параметр ε удовлетворяет следующим условиям.

Из неравенства (22) следует, что

$$\varepsilon < \varepsilon_1 = exp\left\{\frac{k_2-\nu_2}{2\nu_2}\cdot x_\nu\right\}.$$

Далее, очевидно,

$$\varepsilon < \varepsilon_2 = exp\{2x_\nu(k_2-\nu_2)\}.$$

Если $\varepsilon_0 = min\{\varepsilon_1;\ \varepsilon_2\}$, то для любого $\varepsilon \in (0;\ \varepsilon_0)$ выполняется требование теоремы.

Левая и правая части неравенств (21) и (22) являются обратными функциями к $g_2(x)$ и $\tilde{\lambda}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_2-\varepsilon^2 e^{2\nu_2 x}}}$ соответственно. Очевидно, для данной функции $f_2(x) = g_2(x)\cdot e^{2k_2 x}$ построенная таким образам функция $\frac{\varepsilon e^{2\nu_2 x}}{\sqrt{\tilde{c}_2-\varepsilon^2 e^{2\nu_2 x}}} = \nu_2(x)$, где $\tilde{c}_2$ выбрана по ν_2, удовлетворяет теореме. Теорема доказана.

Теорема 3. Можно указать число $\nu_1 > 0$ и функцию $\lambda_1(x)$, удовлетворяющую уравнению (17) при $\nu = \nu_1$, такую, что $f_1(x) \le \tilde{\lambda}_1(x)$, где $f_1(x)$- интегральная кривая уравнения (15).

Доказательство. По теореме 1 уравнение (15) имеет решение, представляемое в виде

$$f_1(x) = e^{2k_1 x}\cdot g_1(x),$$

где $\bar{y} = g_1(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{a_1}{a_0^{2ln}} ln\left(a_1 - \frac{a_0}{\bar{y}}\right) + \frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{\bar{y}} = \frac{1}{2k_2+1}\left(e^{(2k_1+1)x} - e^{(2k_1+1)x_1}\right). \qquad (23)$$

Рассуждая, как в начале доказательства предыдущей теоремы, получим соотношения

$$x_\nu \le x_1,\ g_1(-\infty) \le \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_1}}. \qquad (24)$$

Числа $g_1(-\infty)$ и x_1 фиксированы. Выберем $\tilde{c}_1$ (по нему и x_ν (см. (18)) так, чтобы выполнялись вышеприведенные неравенства. Если присоединить к ним неравенство $\nu \le k_1$, получаемое из формул $e^{2k_1 x} \le \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} e^{2\nu x}$, где $\tilde{\varepsilon}$ - некоторый положительный параметр, то полученное таким образом минимальное число, которое обозначим через ν_1, будет требуемым теоремой числом.

Начиная с некоторого положительного числа $\bar{y}$ выполняется неравенство

$$\frac{2\tilde{k}}{\bar{y}^2(a_1\bar{y}-a_0)} > \frac{2}{\bar{y}^3},$$

где $\tilde{k} = k_1 + \frac{1}{2}$. Интегрируя последнее неравенство в пределах от $\bar{y}_0$ до $\bar{y}$, получим,

$$2\tilde{k}\left[\frac{a_1}{a_0^2} ln\left(a_1 - \frac{a_0}{\bar{y}}\right) + \frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{\bar{y}}\right] + 2\tilde{k}c_1 > \tilde{c}_1 - \frac{1}{\bar{y}^2},$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{\bar{y}_0} - \frac{a_1}{a_0^2} ln\left(a_1 - \frac{a_0}{\bar{y}_0}\right),\ \tilde{c}_1 = \frac{1}{\bar{y}_0^2}.$$

Из последнего неравенства получим

$$\frac{1}{2\tilde{k}} ln\left\{2\tilde{k}\left[\frac{a_1}{a_0^2} ln\left(a_1 - \frac{a_0}{\bar{y}}\right) + \frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{\bar{y}}\right] + 2\tilde{k}c_1\right\} > \frac{1}{2\tilde{k}} \ln\left(\tilde{c}_1 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right). \quad (25)$$

Из этого неравенства получим (см. предыдущую теорему)

$$\frac{1}{2\tilde{k}} ln\left(\tilde{c}_1 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right) > \frac{1}{2\nu_1} ln\tilde{\varepsilon}^2\left(\tilde{c}_1 - \frac{1}{\bar{y}^2}\right), \quad (26)$$

где $\tilde{\varepsilon}$- параметр (напомним, что $\nu_1 < k_1$).

Выбор $\tilde{\varepsilon}$ производится следующим образом:

$0 < \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_0$, где

$$\tilde{\varepsilon}_0 = min\left\{\tilde{c}_1 e^{\frac{\nu_1 - \tilde{k}}{2\tilde{\tilde{k}}}},\ e^{2x_1(\nu_1 - k_1)}\right\}.$$

Для выбранных $\tilde{\varepsilon}$ выполняется требование теоремы, ибо левая часть (25) и правая часть (26) являются обратными функциями для функций $g_1(x)$, $\tilde{\lambda}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_1 - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} e^{2\nu_1 x}}}$ соответственно. Таким образом, $f_1(x) \le \lambda_1(x)$, где $f_1(x) = g_1(x) e^{2k_1 x}$ а $\lambda_1 = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} e^{2\nu_1 x} \times$ $\times \tilde{\lambda}_1(x)$.

Теорема 4. Для любого заданного числа $\delta_1^* > 0$ существует единственная геодезическая линия в метрике (1), длина проекции которой на ось oy равна δ_1^*.

Доказательство. По двум последним теоремам решение дифференциального уравнения (12) удовлетворяет неравенству (см [1])

$$\lambda_2(x) \le \bar{f}(x) \le \lambda_1(x), \quad (27)$$

когда $\bar{y} = \bar{f}(x) > 0$. Все рассуждения в теоремах 2 и 3 были приведены для случая $\bar{y} = \bar{f}(x) > 0$. Отметим, что в случае $\bar{y} = \bar{f}(x) < 0$ мажорантные уравнения нетрудно получить, опираясь на теоремы 2 и 3. Следовательно, неравенство, аналогичное (27), можно записать для случая $\bar{y} = \bar{f}(x) < 0$. Таким образом, интегрируя полученное неравенство с учетом начальных данных, получим, что решение уравнения (11) заключено между двумя функциями (в параметрической плоскости), являющимися геодезическими линиями в разных плоскостях Лобачевского. Так как для плоскости Лобачевского подходящим выбором начальных данных можно добиться того, что длина проекции геодезической на оси oy имела заданное значение, то отсюда следует аналогическое свойство для метрики (1).

Например, все аргументы данной функции $y = f(x)$ не превосходят аргументы

$$\lambda_1^*(x) = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\nu_1}\sqrt{\frac{\delta_1^{*2}\nu_1^2}{4\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} e^{2\nu_1 x}} + \frac{\tilde{n}_i + \tilde{n}_j}{2}, \quad (28)$$

где $\lambda_1^*(x)$ – уравнение геодезической в плоскости Лобачевского кривизны - ν_1^2; $\tilde{n}_i$ и $\tilde{n}_j$ - основания проекции на оси oy; $\delta_1^* = \tilde{n}_j - \tilde{n}_i$ – длина проекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. – М.: Мир, 1970.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа*. – М.: Наука.- 1982.-Т. 1.

Материал поступил в редакцию 29.09.2015.

ՄԱԺՈՐԱՆՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ $ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2$ ՄԵՏՐԻԿԱՅՈՒՄ

Ռ. Ծ. Մուսայելյան

Դիտարկվում է $ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2$ (1) մետրիկան և հայտնի դիֆֆերենցիալ հավասարումների համեմատման տեսության (տես [1]) օգնությամբ ստացվում են որոշ արդյունքներ: Սահմանվում է հավասարումների լուծումների ամբողջական ասիմպտոտիկ կայունությունը (տես [1]): Ապացուցվում է, որ նշված մետրիկայում գեոդեզիկական գծերը մաժորացվում են որոշակի կորության Լոբաչևսկու հարթության գեոդեզիկ գծերով:

Առանցքային բառեր. մետրիկա, կորություն, ածանցյալ, հարթություն, գեոդեզիկական գծեր:

MAJORANT EQUATIONS OF $ds^2 = dx^2 + [e^{-x} + b(y)]^2 dy^2$ IN THE METRIX

R.Ts. Musayelyan

The following research studies the metrix $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + [\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + \mathrm{b(y)}]^2 \mathrm{dy}^2$ and we have received some results with the help of the theory of comparison of differential equations /see[1]/. The total asymptotic stability of the solutions to equations has been determined /see [1]/. It has been proved that the geodesic lines are majorized with the geodesic lines of Lobachevski's plane of some curvature in the given metrix.

Keywords: metrix, curvature, derivative, plane, geodesic lines.

УДК 517.968.4

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МАКСИМАЛЬНОСТИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, А. В. Саргсян

(Российско-Армянский (Славянский) университет,
Ереванский государственный университет)

E-mails: harkamo@rambler.ru, kamalyan_armen@yahoo.com, ann-sargsyan@yandex.ru

Рассматривается множество $A(\chi)$ наборов частных индексов нижне-треугольных матриц-функций, диагональные элементы которых факторизуемы с индексами, равными компонентам вектора $\chi \in Z^n$. Указанное множество содержится в множестве $M(\chi)$ всех векторов, мажорирующихся вектором χ. Найдены условия на χ, необходимые для выполнения равенства $A(\chi) = M(\chi)$.

Ключевые слова: треугольные матрицы-функции, факторизация, частные индексы.

1°. Пусть Γ - карлесоновский замкнутый контур комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограничивающий конечно-связную область, содержащую нулевую точку. Сингулярный интегральный оператор S, определенный по формуле

$$S(\varphi) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau ,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным в пространствах $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ (см. [1]). Рассмотрим классы функций $L_p^+ = \operatorname{Im} P_+$, $L_p^- = \operatorname{Im} P_- + C$, где проекторы $P_\pm$ определяются равенствами $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$. Ниже для множества X через X^n и $X^{n\times n}$ будем обозначать соответственно множество n-мерных векторов и множество всех матриц порядка $n \times n$ с компонентами из X.

Пусть G, $G^{-1} \in L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$. Под факторизацией матрицы-функции G (см. [2], [3]) относительно контура Γ в пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ мы понимаем представление

$$G = G_- \cdot \Lambda \cdot G_+^{-1},$$

где $G_\pm^{-1} \in \left(L_q^\pm\right)^{n\times n}$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, оператор $G \cdot S \cdot G_-^{-1}$ ограничен в пространстве $\left(L_p(\Gamma)\right)^n$ (действие S на вектор-функцию понимается покомпонентно), $\Lambda(t) = diag\left(t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, ..., t^{\kappa_n}\right)$, $(\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n) \in Z^n$.

Целые числа $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ называются частными индексами матрицы-функции G, а в скалярном случае $n = 1$ - просто индексом функции G. Вектор $\left(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n\right) \in Z^n$ будем называть набором частных индексов матрицы-функции G. Набор частных индексов определяется однозначно с точностью до произвольной перестановки его компонент.

Пусть $\chi = \left(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\right) \in Z^n$. Обозначим через $T\left(\chi\right)$ множество нижне-треугольных матриц-функций из класса $L_\infty^{n \times n}\left(\Gamma\right)$, диагональные элементы которых факторизуемы и индекс j-го диагонального элемента равен χ_j Как известно (см. [3]), матрицы-функции из класса $T\left(\chi\right)$ допускают факторизацию. Множество $A\left(\chi\right) \subset Z^n$ определим следующим образом: вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ принадлежит множеству $A\left(\chi\right)$ тогда и только тогда, когда является набором частных индексов некоторой матрицы-функции G из $T\left(\chi\right)$. Заметим, что множество $A\left(\chi\right)$ симметрично в том смысле, что с каждым вектором κ из $A\left(\chi\right)$ множеству $A\left(\chi\right)$ принадлежат и все векторы, полученные из κ путем всевозможных перестановок его компонент.

В работе [3] (см. также [4]) доказано, что множество всевозможных наборов частных индексов матриц-функций вида $G = G_- \cdot \Lambda \cdot G_+^{-1}$, где $G_\pm \in \left(L_q^\pm\right)^{n \times n}$, совпадает с множеством $M\left(\chi\right) \subset Z^n$ всех векторов, мажорируемых по Харди, Литлвуд, Пойяи. Таким образом, имеют место следующие включения:

$$E\left(\chi\right) \subset A\left(\chi\right) \subset M\left(\chi\right),$$

где $E\left(\chi\right)$ – множество всех векторов, получающихся путем всевозможных перестановок компонент вектора χ.

Конструктивное описание множества $A\left(\chi\right)$ получено в работе [5]. В работе [6] исследованы экстремальные ситуации, т.е. когда вектор χ обладает либо свойством минимальности (т.е. $A\left(\chi\right) = E\left(\chi\right)$), либо свойством максимальности (т.е. $A\left(\chi\right) = M\left(\chi\right)$). В работе [6] получены необходимые и достаточные условия минимальности вектора χ. В общем случае задача описания векторов χ, обладающих свойством максимальности, на данный момент остается нерешенной. В работе [6] получены некоторые достаточные условия максимальности вектора χ, а также необходимые и достаточные условия максимальности вектора χ при $n = 3$.

В данной работе мы приводим некоторые необходимые условия, при которых вектор χ обладает свойством максимальности.

Подмножество B множества $A\left(\chi\right)$ назовем базовым, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B, совпадает с

$A(\chi)$. Задача описания множества $A(\chi)$, по существу, сводится к нахождению базового подмножества простой структуры.

Пусть $\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \in Z^n$ и $\Delta = \{1, 2, ..., n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi) = \{(i,j) : i > j, \chi_i - \chi_j \geq 2\}$$

и отображения $\pi_1 : D(\chi) \to \Delta$, $\pi_1 : D(\chi) \to \Delta$, определенные равенствами $\pi_1 \{(i,j)\} = i$, $\pi_2 \{(i,j)\} = j$. Скажем, что подмножество $D' \subset D(\chi)$ является (T,χ)-допустимым, если множества $\pi_1(D')$ и $\pi_2(D')$ не пересекаются. В частности, (T,χ)-допустимым является пустое множество. Множество (T,χ)-допустимых подмножеств обозначим через J. Под слоем, соответствующим (T,χ)-допустимому подмножеству D', будем понимать множество $A_T(D',\chi) \subset \mathbb{Z}^n$, определяемое следующим образом. Вектор $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n) \in Z^n$ принадлежит $A_T(D',\chi)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

A1. $\kappa_i < \chi_i$ для $i \in \pi_1(D')$, $\kappa_i > \chi_i$ для $i \in \pi_2\{D'\}$, $\kappa_i = \chi_i$ для $i \in \Delta \setminus \{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\}$.

A2. $\kappa_i \geq \kappa_j$ для $(i,j) \in D'$.

A3. $\kappa_i < \kappa_j$ для $(i,j) \in \left(D(\chi) \cap \left(\pi_1(D') \times \pi_2(D')\right)\right) \setminus D'$.

A4. Для любого подмножества $\omega \subset \pi_2(D')$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega} (\kappa_j - \chi_j) \leq \sum_{i \in \pi_1\left(D' \cap \pi_2^{-1}(\omega)\right)} (\chi_i - \kappa_i).$$

A5. $\sum_{i=1}^{n} \kappa_i = \sum_{i=1}^{n} \chi_i$.

Приведем формулировки двух теорем (см. [5] и соответственно [6]), необходимых для доказательства теорем 3-5.

Теорема 1. Множество $\bigcup_{D' \in J} A_T(D',\chi)$ является базовым подмножеством $A(\chi)$.

Введем следующие обозначения: $\nu_+ = \max\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\}$, $\nu_- = \min\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\}$, $\Delta^+_{\kappa,\chi} = \{i \in \Delta : \kappa_i > \chi_i\}$, $\Delta^-_{\kappa,\chi} = \{i \in \Delta : \kappa_i < \chi_i\}$, $\Delta^0_{\kappa,\chi} = \{i \in \Delta : \kappa_i = \chi_i\}$.

Множество $D_{\kappa,\chi} \subset D(\chi)$ определим следующим образом. Скажем, что $(i,j) \in \Delta \times \Delta$ принадлежит $D_{\kappa,\chi}$, если одновременно выполнены неравенства $i > j$ и $\chi_i > \kappa_i \geq \kappa_j > \chi_j$.

Скажем, что вектор $\kappa \in Z^n$ T-мажорируется вектором $\chi \in Z^n$ и будем писать $\kappa \underset{T}{\prec} \chi$, если выполнены следующие условия:

$T1$. $\pi_2\left(D_{\kappa,\chi}\right)=\Delta^+_{\kappa,\chi}$.

$T2$. Для любого подмножества $\omega_+\subset\Delta^+_{\kappa,\chi}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j\in\omega_+}\left(\kappa_j-\chi_j\right)\le\sum_{i\in\pi_1\left(D_{\kappa,\chi}\cap\pi_2^{-1}\left(\omega_+\right)\right)}\left(\chi_i-\kappa_i\right).$$

$T3$. $\sum_{i=1}^{n}\kappa_i=\sum_{i=1}^{n}\chi_i$.

Множество всех векторов $\kappa\in Z^n$, T-мажорирующихся вектором χ, обозначим через $M_T\left(\chi\right)$. $\kappa\underset{T}{\prec}\chi$ эквивалентно одновременному выполнению условий $T'1$, $T'2$, $T'3$ (см. Предложение 4.1 работы [6]):

$T'1$. $\pi_1\left(D_{\kappa,\chi}\right)=\Delta^-_{\kappa,\chi}$.

$T'2$. Для любого подмножества $\omega_-\subset\Delta^-_{\kappa,\chi}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i\in\omega_-}\left(\kappa_i-\chi_i\right)\le\sum_{j\in\pi_2\left(D_{\kappa,\chi}\cap\pi_1^{-1}\left(\omega_-\right)\right)}\left(\chi_j-\kappa_j\right).$$

$T'3$. $\sum_{i\in\Delta^+_{\kappa,\chi}}\left(\kappa_i-\chi_i\right)=\sum_{j\in\Delta^-_{\kappa,\chi}}\left(\chi_j-\kappa_j\right)$.

В работе [6] также доказана следующая теорема.

Теорема 2. Множество $M_T\left(\chi\right)$ совпадает с $\bigcup_{D'\in J}A_T\left(D',\chi\right)$.

2°. Докажем некоторые необходимые условия, при которых вектор χ обладает свойством максимальности.

Пусть $\chi=\left(\chi_1,\chi_2,...,\chi_n\right)\in Z^n$, $a,b\in\mathbb{R}$ и $\chi\left(a,b\right)=\left\{\chi_i;a<\chi_i<b,i=1,...,n\right\}$. Если множество $\chi\left(a,b\right)$ непусто и состоит из элементов $\chi_{n_1},\chi_{n_2},...,\chi_{n_l}$, где $n_1<n_2<...<n_l$, то вектор $\tilde{\chi}=\left(\tilde{\chi}_1,\tilde{\chi}_2,...,\tilde{\chi}_l\right)\in Z^l$, где $\tilde{\chi}_i=\chi_{n_i}$ $\left(i=1,...,l\right)$, назовем $\left(a,b\right)$-частью вектора χ.

Теорема 3. Если вектор $\chi=\left(\chi_1,\chi_2...,\chi_n\right)\in Z^n$ обладает свойством максимальности (т.е. $A\left(\chi\right)=M\left(\chi\right)$), то этим свойством обладает также любая $\left(a,b\right)$-часть вектора χ.

Доказательство. Пусть вектор $\chi=\left(\chi_1,\chi_2...,\chi_n\right)\in Z^n$ обладает свойством максимальности и $\tilde{\chi}=\left(\tilde{\chi}_1,\tilde{\chi}_2,...,\tilde{\chi}_l\right)\in Z^l$ $\left(a,b\right)$-часть вектора χ. При $l=1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что $l\ge2$, и пусть $\tilde{\chi}_i=\chi_{n_i}$ $\left(i=1,...,l\right)$ $\left(i=1,...,l\right)$, $\tilde{\kappa}=\left(\tilde{\kappa}_1,\tilde{\kappa}_2,...,\tilde{\kappa}_l\right)\in M\left(\tilde{\chi}\right)$. Определим $\kappa=\left(\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n\right)\in Z^n$ следующим образом: $\kappa_{n_i}=\tilde{\kappa}_i$ при $i=1,...,l$ и $\kappa_i=\chi_i$ при $i\notin\left\{n_1,n_2,...,n_l\right\}$. Очевидно, что $\kappa\in M\left(\chi\right)$. В силу максимальности χ, $\kappa \in A(\chi)$, и потому по теореме 1 существует перестановка $\sigma\kappa = \left(\kappa_{\sigma(1)}, \kappa_{\sigma(2)}, \ldots, \kappa_{\sigma(n)}\right)$ и (T,χ)- допустимое подмножество $D' \subset D(\chi)$ такое, что $\sigma\kappa \in A_T(D', \chi)$. Обозначим через $\eta_1, \eta_2 \ldots, \eta_m \left(\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_m\right)$ все значения $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, не превышающие a, и введем множество

$$\Delta_j = \left\{i \in \Delta; \chi_i = \eta_j\right\} = \left\{i \in \Delta; \kappa_i = \eta_j\right\}, j = 1, \ldots, m .$$

Пусть $\kappa_{\sigma(i)} = \eta_1$. Если при некотором $s > i$ пара (s,i) принадлежит $D_{\sigma\kappa,\chi}$, то $\chi_s > \kappa_{\sigma(s)} \geq \kappa_{\sigma(i)} > \chi_i$. Но тогда $\chi_i < \eta_1$, чего не может быть. В этом случае, если при некотором $s < i$ пара (i,s) принадлежит $D_{\sigma\kappa,\chi}$, то имеет место $\chi_i > \kappa_{\sigma(i)} \geq \kappa_{\sigma(s)} > \chi_s$, что означает $\chi_s < \eta_1$, чего также не может быть. Полученные противоречия показывают, что пары (s,i) и (i,s) ни при каких значениях s не принадлежат $D_{\sigma\kappa,\chi}$. В силу условий $T1$ и $T'1$, i не принадлежит $\Delta^+_{\sigma\kappa,\chi} \cup \Delta^-_{\sigma\kappa,\chi}$. В силу теоремы 2, $i \in \Delta \setminus \left\{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\right\}$, и потому $\chi_i = \kappa_{\sigma(i)} = \eta_1$. Таким образом, $\Delta_1 \subset \Delta \setminus \left\{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\right\}$. Кроме того, из $\sigma(i) \in \Delta_1$ следует, что $i \in \Delta_1$. Последнее означает, что $\sigma(\Delta_1) = \Delta_1$. В частности, без потери общности рассуждений можно считать, что $\sigma\big|_{\Delta_1} = id$.

Пусть $\sigma(i) \in \Delta_2$. Если при некотором $s > i$ пара (s,i) принадлежит $D_{\sigma\kappa,\chi}$, то $\chi_s > \kappa_{\sigma(s)} \geq \kappa_{\sigma(i)} > \chi_i$.. Поскольку $\kappa_{\sigma(i)} = \eta_2$, то $\chi_i = \eta_1$, т.е. $i \in \Delta_1$. Тогда $\sigma(i) \in \Delta_1$ и $\chi_s < \eta_1$, чего не может быть. Полученные противоречия доказывают, что $(s,i) \notin D'$. В случаем, когда при некотором $s < i$ пара (i,s) принадлежит $D_{\sigma\kappa,\chi}$, то имеет место $\chi_i > \kappa_{\sigma(i)} \geq \kappa_{\sigma(s)} > \chi_s$. Отсюда следует, что $\chi_s = \eta_1$, т.е. $s \in \Delta_1$, и, кроме того, $s \in \Delta^+_{\sigma\kappa,\chi}$. Но это означает, что $i \in \pi_1(D')$, $s \in \pi_2(D')$, что противоречит уже доказанному включению $\Delta_1 \subset \Delta \setminus \left\{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\right\}$. Из полученных противоречий следует, что в $D_{\sigma\kappa,\chi}$ нет пар вида (s,i) и (i,s). Из условий $T1$ и $T'1$ следует, что $i \notin \Delta^+_{\sigma\kappa,\chi} \cup \Delta^-_{\sigma\kappa,\chi}$, и потому, в силу теоремы 2, $i \in \Delta \setminus \left\{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\right\}$. Таким образом, $\chi_i = \kappa_{\sigma(i)} = \eta_2$ и $\Delta_2 \subset \Delta \setminus \left\{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\right\}$. Кроме того, из $\sigma(i) \in \Delta_2$ следует, что $i \in \Delta_2$. Последнее означает, что $\sigma(\Delta_2) = \Delta_2$. В частности, без потери общности рассуждений можно считать, что $\sigma\big|_{\Delta_2} = id$.

Понятно, что, последовательно повторяя проделанные рассуждения, получим $\Delta_i \subset \Delta \setminus \left\{\pi_1\left(D'\right) \cup \pi_2\left(D'\right)\right\}$ для $i = 1,\dots,l$.

Таким образом,

$$\bigcup_{i=1}^{l} \Delta_i \subset \Delta \setminus \left\{\pi_1\left(D'\right) \cup \pi_2\left(D'\right)\right\} \text{ и } \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{l} \Delta_i\right) = \bigcup_{i=1}^{l} \Delta_i,$$

и потому $\pi_1\left(D'\right) \cup \pi_2\left(D'\right) \subset \left\{n_1, n_2, \dots, n_s\right\}$ и $\sigma\left(\left\{n_1, n_2, \dots, n_s\right\}\right) = \left\{n_1, n_2, \dots, n_s\right\}$.

Определим множество $\tilde{D}' \subset D\left(\tilde{\chi}\right)$ следующим образом: будем считать, что пара $\left(i, j\right), i, j = 1,\dots,s; i > j$ принадлежит $\tilde{D}'$ тогда и только тогда, когда пара $\left(n_i, n_j\right)$ принадлежит множеству D'. Очевидно, что i принадлежит $\pi_1\left(\tilde{D}'\right)\left(\pi_2\left(\tilde{D}'\right)\right)$ тогда и только тогда, когда n_i принадлежит $\pi_1\left(D'\right)\left(\pi_2\left(D'\right)\right)$. Отсюда следует, что $\tilde{D}'$ является $\left(T, \tilde{\chi}\right)$-допустимым.

Определим отображение $\psi : \left\{1,\dots,s\right\} \to \left\{n_1, n_2, \dots, n_s\right\}$ по формуле $\psi\left(i\right) = n_i$ и обозначим через $\tilde{\sigma}$ перестановку, определенную на $\left\{1,\dots,s\right\}$ с помощью равенства $\tilde{\sigma}\tilde{\kappa} = \left(\tilde{\kappa}_{\tilde{\sigma}\left(n_1\right)},\dots,\tilde{\kappa}_{\tilde{\sigma}\left(n_s\right)}\right) = \left(\tilde{\kappa}_{\psi^{-1}\sigma\varphi\left(1\right)},\dots,\tilde{\kappa}_{\psi^{-1}\sigma\varphi\left(s\right)}\right)$. Остается убедиться, что $\tilde{\sigma}\tilde{\kappa} \in A_T\left(\tilde{D}', \tilde{\chi}\right)$. Выполнение условий А1-А5 легко следует из $\sigma\kappa \in A_T\left(D', \chi\right)$.

Теорема 4. Пусть число компонент вектора $\chi = \left(\chi_1, \chi_2 \dots, \chi_n\right) \in Z^n$, равных ν_-, не превосходит числа компонент вектора χ, больших или равных $\nu_- + 2$. Для того чтобы $A\left(\chi\right) = M\left(\chi\right)$, необходимо, чтобы последняя компонента вектора χ не была равной ν_-.

Доказательство. Предположим, что $n \in \left\{k_1, k_2, \dots, k_s\right\} = \left\{k \in \Delta : \chi_k = \nu_-\right\}$ и $\chi_{l_1} \geq \nu_- + 2$, $\chi_{l_2} \geq \nu_- + 2$, ..., $\chi_{l_s} \geq \nu_- + 2$, $\left\{l_1, l_2, \dots, l_s\right\} \subset \Delta$. Тогда вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$, компоненты которого равны: $\kappa_{k_1} = \kappa_{k_2} = \dots = \kappa_{k_s} = \nu_- + 1$, $\kappa_{l_1} = \chi_{l_1} - 1$, $\kappa_{l_2} = \chi_{l_2} - 1$, ..., $\kappa_{l_s} = \chi_{l_s} - 1$ и $\kappa_i = \chi_i$, $i \in \Delta \setminus \left\{k_1, k_2, \dots, k_s, l_1, l_2, \dots, l_s\right\}$, очевидно, принадлежит $M\left(\chi\right)$, но не принадлежит $A\left(\chi\right)$, так как в противном случае - $n \in \Delta \setminus \left\{\pi_1\left(D'\right) \cup \pi_2\left(D'\right)\right\}$, и, согласно условию А1 теоремы 1, $\kappa_n = \chi_n = \nu_-$, что неверно.

Теорема 5. Пусть число компонент вектора $\chi = \left(\chi_1, \chi_2 \dots, \chi_n\right) \in Z^n$, равных ν_+, не превосходит числа компонент вектора χ, меньших или равных $\nu_+ - 2$. Для того чтобы $A\left(\chi\right) = M\left(\chi\right)$, необходимо, чтобы первая компонента вектора χ не была равной ν_+.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $1 \in \{k_1, k_2, \ldots, k_s\} = \{k \in \Delta : \chi_k = \nu_+\}$ и $\chi_{l_1} \le \nu_+ - 2, \chi_{l_2} \le \nu_+ - 2, \ldots, \chi_{l_s} \le \nu_+ - 2, \{l_1, l_2, \ldots, l_s\} \subset \Delta$. Тогда вектор $\kappa \in \mathbb{Z}^n$, компоненты которого равны: $\kappa_{k_1} = \kappa_{k_2} = \ldots = \kappa_{k_s} = \nu_- - 1, \kappa_{l_1} = \chi_{l_1} + 1, \kappa_{l_2} = \chi_{l_2} + 1, \ldots,$ $\kappa_{l_s} = \chi_{l_s} + 1$ и $\kappa_i = \chi_i$ при $i \in \Delta \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_s, l_1, l_2, \ldots, l_s\}$, очевидно, принадлежит $M(\chi)$, но не принадлежит $A(\chi)$, так как в противном случае - $1 \in \Delta \setminus \{\pi_1(D') \cup \pi_2(D')\}$, и, согласно условию А1 теоремы 1, $\kappa_1 = \chi_1 = \nu_+$, что неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Böttcher A., Karlovich Yu.I. *Carleson curves, Muchenhoupt weights, and Toeplitz operators.* -Birkhäser Verlag, Basel and Boston, 1997.
2. Clancey K., Gohberg I. *Factorization of matrix-functions and singular integral operators.* // Operator Theory: Advances and Appl. Birkhäser Verlag, Basel and Boston, 1981.- Vol. 3.
3. Litvinchuk G.S., Spitkovsky I.M. *Factorization of matrix-functions.*- Birkhäser Verlag, Basel and Boston, 1987.
4. Камалян А.Г. *Формулы типа Гохберга-Лерера-Родмана для частных индексов матриц-функций//*Изв. НАН Армении.- Математика.- 1994.-Т. 29, №.5.- С. 31-41.
5. Арутюнян К.В., Камалян А.Г., Спитковский И.М. *О возможных наборах частных индексов треугольных матриц-функций* //Доклады НАН Армении.- Математика.- 2015.- Т. 115, № 1.- С.7-14.
6. Арутюнян К.В., Камалян А.Г., Спитковский И.М. *О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций* // Доклады НАН Армении.- Математика.- 2015.- Т. 116, № 2.-С. 87-92.
7. Feldman I., Markus A *On some properties of factorization indices//* Birkhauser Verlag, Basel, Integral equ. Oper. Theory.-1998.- 30 .-P. 326-337.

Материал поступил в редакцию 29.09.2015.

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ ՄԱՏՐԻՑ-ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԻՆԴԵՔՍՆԵՐԻ ՄԱՔՍԻՄԱԼՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Կ.Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ա. Վ. Սարգսյան

Դիտարկվում է ստորին-եռանկյուն մատրից-ֆունկցիաների $A(\chi)$ մասնավոր ինդեքսների հավաքածուների բազմությունը, որոնց անկյունագծային տարրերը ֆակտորիզացվող են $\chi \in Z^n$ վեկտորի կոմպոնենտներին հավասար ինդեքսներով: Նշված բազմությունը ընդգրկված է χ վեկտորով մաժորացվող $M(\chi)$ վեկտորների բազմության մեջ: Գտված են χ-ի վրա պայմանները, որոնք ապահովում են $A(\chi) = M(\chi)$ հավասարումը:

Առանցքային բառեր. եռանկյուն մատրից-ֆունկցիաներ, ֆակտորիզացիա, մասնավոր ինդեքսներ:

THE NECESSARY CONDITIONS FOR MAXIMIZATION OF THE PARTIAL INDICES OF TRIANGULAR MATRIX-FUNCTIONS

K.V. Harutyunyan, A.G. Kamalyan, A.V. Sargsyan

The set $A(\chi)$ of the partial indices of lower-triangular matrix-functions is considered, diagonal elements of which are factorizable with indices equal to the components of the vector $\chi \in Z^n$. The mentioned set $A(\chi)$ is included in the set $M(\chi)$ of all vectors majorized by χ. The conditions on χ under which $A(\chi) = M(\chi)$ are obtained.

***Keywords*:** triangular matrix-functions, factorizable, partial indices.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

★ ★ ★

«Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական ժողովածուն լուսաբանում է բարձրագույն և հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը: Ժողովածուում տպագրվում են հանրապետության բուհերի, հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների, մասնագետների՝ այդ ուղղությամբ կատարած հետազոտությունները, մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում ստացված ժամանակակից արդյունքները: Ժողովածուն նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, հայցորդների, ուսուցիչների, դասախոսների համար:

Հոդվածները կարող են ներկայացվել հայերեն, ռուսերեն, անգլերեն լեզուներով:

★ ★ ★

Научно-методический сборник «Математика в высшей школе» освещает актуальные вопросы преподавания математики в общеобразовательной и высшей школе. В сборнике печатаются современные результаты, полученные в разных областях математики, а также исследования в этом направлении, сделанные специалистами, преподавателями вузов республики, учителями общеобразовательных школ. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, соискателей, учителей, преподавателей вузов.

Статьи могут быть представлены на армянском, русском, английском языках.

★ ★ ★

Guidance collection «Mathematics in high school» covers modern basic questions of teaching mathematics in general educational and high school. Results received nowadays in different fields of mathematics as well as researches in this direction made by specialists, lecturers of Higher Educational Institutions of the republic and teachers of general educational schools are published here. The collection is designed for students, post-graduate students, competitors, teachers, lecturers.

Articles can be submitted in Armenian, Russian, English.

ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ՊԱՀԱՆՋՆԵՐԸ

Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Տեքստի տառատեսակը՝ Sylfaen, տառաչափը՝ 10pt, սյուների հեռավորությունը՝ 1 սյուն, էջի ֆորմատը՝ A4 (210×297մմ), լուսանցքները. վերևից՝ 5սմ, ներքևից՝ 5,1սմ, ձախից՝ 5,75սմ, աջից՝ 1,75սմ:

Հոդվածի վերնագիրը տրվում է գլխատառերով, մեջտեղում, **bold**, 12pt տառաչափով, իսկ հեղինակի(ների) Ա. Հ. Ազգանունը(ները)՝ փոքրատառերով, միայն սկզբնատառերը՝ մեծատառ, ***bold Italic***, 11pt տառաչափով:

Համառոտագրերը տրվում են երեք լեզուներով, 9pt տառաչափով, 5-6 առանցքային բառերով:

Բոլոր բանաձևերը և մաթեմատիկական արտահայտությունները տրվում են MathType (Euclid10.eqp) կամ Microsoft Equation 4.0, *Italic*, 10pt տառաչափով: Հիմնական բանաձևերը ներկայացվում են առանձին սյունով, մեջտեղում և համարակալվում են նույն էջի անկյունում՝ փակագծերի մեջ:

Օգտագործված գրականությունը համարակալվում է ըստ հղումների հերթականության՝ [1],[2],… տեսքով: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը չպետք է գերազանցի 10 էջը: Տեքստի վերջում տրվում են հոդվածի ներկայացման ամսաթիվը և տարեթիվը:

Հոդվածը գրախոսվում է:

Վերոհիշյալ պահանջները բավարարող հոդվածը (2 օրինակ) և հոդվածի ֆայլը՝ գրված Microsoft Office Word (*.doc կամ *.docx) ֆորմատով, ներկայացվում է ժողովածուի պատասխանատու քարտուղարին: Խմբագրական խորհուրդն իրավունք ունի վերջնական խմբագրման ենթարկել հոդվածները: Խորհրդի կողմից հրատարակման չերաշխավորվելու դեպքում հոդվածը չի վերադարձվում:

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи представляются на армянском, русском или английском языках. Объем статьи не должен превышать 10 печатных страниц. Шрифт – Sylfaen, размер шрифта – 10pt, межстрочный интервал – 1. Формат страницы – A4 (210 × 297мм). Поля: сверху – 5см, снизу – 5.1 см, слева – 5.75см, справа – 1.75см. Название статьи набирается заглавными буквами, выравнивание по центру, шрифт: **bold**, размер шрифта – 12pt. И.О.Фамилия автора(ов) набирается строчными буквами, шрифт: ***bold italic***, размер шрифта – 10pt. Аннотация представляется на трех языках, размер шрифта – 9pt. 5–6 ключевых слов также на трех языках. Все формулы и математические выражения набираются редактором MathType (Euclid10.eqp) или Microsoft Equation 4.0, *italic*, размер шрифта – 10pt. Формулы набираются с новой строки в центре, номер формулы ставится в конце строки, в скобках. Цитированная литература нумеруется по порядку ссылки в статье, в квадратных скобках ([1],[2],...). В конце статьи пишется дата (число/месяц/год) представления статьи. Статья в двух экземплярах и файл статьи в формате Microsoft Office Word (*.doc или *.docx) представляется ответственному секретарю. **Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.** Представленные статьи рецензируются. Отклоненные редакционным советом статьи не возвращаются. Редакционный совет оставляет за собой право окончательного редактирования статьи.

ARTICLE DESIGNING GUIDELINES

Articles may be presented in the Armenian, Russian or English languages. The whole size of an article should not exceed 10 printed pages. Font - Sylfaen, font size - 10pt, line spacing - 1. Paper size - A4(210 × 297mm), margins: top - 5sm, bottom- 5.1sm, left - 5.75sm, right - 1.75sm. The name of article is typed in block letters, alignment on the center, font style - **bold**, the size - 12pt. Initials of the author(s) are typed by lower case letters, font style - ***bold italic***, the size - 10pt. The abstracts are presented on three languages, with 5-6 keywords, font size 9pt. All formulas and mathematical expressions should be typed by MathType (Euclid10.eqp) or Microsoft Equation editor, font style – *italic*, the size – 10pt. Basic formulas are typed since a new line in the center. The number of the formula is put in the end of a line, in brackets. The references are numerated in square brackets ([1],[2],...) in order of occurrence in the article. In the end of article the date (number/month/year) of submission of the article should be written. Articles, printed in 2 copies with the file written in Microsoft Office Word (*.doc or *.docx) format, should be submitted to the responsible secretary. **Articles issued without observance of these rules, return without consideration**. Presented articles are reviewed. Articles rejected by the editorial board do not return. The editorial board reserves the right to the final edition of the article.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ԳԻՏԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՀԱՏՈՐ 11 № 3

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ И МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ

ТОМ 11 № 3

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

COLLECTION OF SCIENTIFIC AND METHODICAL ARTICLES

VOLUME 11 № 3

Խմբագիրներ՝
Ժ.Ս. Սեյրանյան
Հ. Ց. Դեպրոսյան

Տեխնիկական խմբագիր
Ա.Ս. Տոնոյան

Ստորագրված է տպագրության՝ 28.12.2015թ.:
Թուղթը՝ <<օֆսեթ>>: Տպագրությունը՝ ռիզո, Ֆորմատ՝ (70x100) 1/16:
Շարվածքը՝ համակարգչային:
Տառատեսակը՝ Times New Roman, GHEA Grapalat: 3.75 տպ. մամ.:
Պատվեր՝ 629: Տպաքանակ՝ 110

Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարանի տպարան
Երևան, Տերյան 105,Հեռ.՝581 313

Типография Национального политехнического университета Армении
Ереван, ул. Теряна 105,
Тел.: 581 313

Printing house of National Polytechnic University of Armenia
105 Teryan str. Yerevan,
Tel. 581 313